

D.M. n°1	CORRECTION	1S1
Chap.1 : fonctions		
Distance d'un point à une courbe : (Exercice 23 page 38)		

Soit Γ la courbe d'équation $y = \sqrt{x}$ et $A(a; 0)$ avec $a > 0$ et bien sur x positif

1) Soit $M(x; \sqrt{x})$ un point de la courbe,

$$f(x) = AM^2 = (x-a)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2 = (x-a)^2 + (\sqrt{x})^2 = (x-a)^2 + |x| = (x-a)^2 + x \quad \text{car } x \text{ positif}$$

donc **$f(x) = (x-a)^2 + x$**

2) a) $f(x) = (x-a)^2 + x = x^2 - 2ax + a^2 + x = \underline{x^2 + (1-2a)x + a^2}$

b) On suppose que $0 < a \leq \frac{1}{2}$

Montrons que $f(x)$ est minimum quand $x=0$

Puisque $0 < a \leq \frac{1}{2}$ on a $0 < 2a \leq 1$

Soit $0 > -2a \geq -1$

Donc $1 > (1-2a) \geq 0$

De ce fait, puisque $x^2 \geq 0$ pour tout x réel,
et $(1-2a)x \geq 0$ pour tout réel x positif

On a $x^2 + (1-2a)x \geq 0$ pour tout réel x positif

soit $x^2 + (1-2a)x + a^2 \geq a^2$

donc pour tout réel x positif, $f(x) \geq a^2$

or ce minimum est atteint puisque $f(0) = a^2$

Donc **le minimum de $f(x)$ est a^2 , il est atteint pour $x=0$**

3) a) On a $[x - (a - \frac{1}{2})]^2 + a - \frac{1}{4} = x^2 - 2x(a - \frac{1}{2}) + (a - \frac{1}{2})^2 + a - \frac{1}{4}$
 $= x^2 - 2ax + x + a^2 - a + \frac{1}{4} + a - \frac{1}{4}$
 $= x^2 - 2ax + a^2 + x$
 $= \underline{x^2 + (1-2a)x + a^2} = \underline{f(x)}$

soit $f(x) = [x - (a - \frac{1}{2})]^2 + a - \frac{1}{4}$

3) b) On suppose que $\frac{1}{2} < a$ donc $(a - \frac{1}{2}) > 0$

En outre $f(x) = [x - (a - \frac{1}{2})]^2 + a - \frac{1}{4}$

Donc puisque $[x - (a - \frac{1}{2})]^2 \geq 0$ pour tout réel x positif (et même pour tout réel x)

$$f(x) = [x - (a - \frac{1}{2})]^2 + a - \frac{1}{4} \geq a - \frac{1}{4}$$

soit **$f(x) \geq a - \frac{1}{4}$** pour tout réel x positif.

Or puisque $(a - \frac{1}{2}) > 0$, on peut calculer l'image de $(a - \frac{1}{2})$ par f

Et $f((a - \frac{1}{2})) = a - \frac{1}{4}$ donc le minimum est atteint par f pour $x = (a - \frac{1}{2})$

Donc, si $\frac{1}{2} < a$, **le minimum de f est $(a - \frac{1}{4})$, il est atteint pour $x = (a - \frac{1}{2})$**