

Nom :

Prénom :

Classe :

1^{re} S

Devoir de mathématiques

le 11 mai 2005

La clarté des raisonnements et la présentation de la copie seront prises en compte dans la notation.

Exercice I

Le radium 266 est un corps radioactif dont 0,04% des atomes se désintègrent chaque année.

1. En janvier 2000, un objet contient $u_0 = 10$ moles de radium 266, calculer le nombre de moles u_1 que l'objet contient en janvier 2001.
2. Soit u_n le nombre de moles de radium 266 que contient l'objet en janvier 2000 + n . Exprimer u_n en fonction de n en justifiant ce résultat.
3. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
4. La période d'un élément radioactif est égale au nombre d'années nécessaire à la désintégration de la moitié des atomes du corps. À l'aide de la calculatrice, déterminer la période du radium 266.

Exercice II

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ la suite définie par $u_n = \frac{n^2 + (-1)^n}{n^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a $1 - \frac{1}{n^2} \leq u_n \leq 1 + \frac{1}{n^2}$.
2. En déduire la limite de la suite (u_n) .

Exercice III

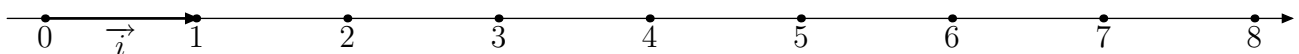
On définit les suites (a_n) et (b_n) par $a_0 = 1$, $b_0 = 7$ et
$$\begin{cases} a_{n+1} &= \frac{1}{3}(2a_n + b_n) \\ b_{n+1} &= \frac{1}{3}(a_n + 2b_n) \end{cases}$$

Soit D une droite munie d'un repère $(O ; \vec{i})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère les points A_n et B_n d'abscisses respectives a_n et b_n .

1. Placez les points A_0 , B_0 , A_1 , B_1 , A_2 et B_2 sur.
2. Soit (u_n) la suite définie par $u_n = b_n - a_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (u_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.

Exprimez u_n en fonction de n . Que peut on dire du signe de u_n ?

3.
 - a. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $a_n \leq b_n$.
 - b. En déduire le sens de variation des suites (a_n) et (b_n) .
 - c. Interprétez géométriquement ces résultats.
4. Soit (v_n) la suite définie par $v_n = a_n + b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Démontrez que (v_n) est une suite constante. Justifiez que les segments $[A_n B_n]$ ont tous le même milieu I.
5. Que peut on conjecturer sur la convergence des suites (a_n) et (b_n) ?
Interprétez géométriquement ce résultat.



Exercice IV

La suite (u_n) est définie par $u_0 = 7$ et pour tout entier naturel par : $u_{n+1} = \frac{2u_n + 6}{5}$.

1. Calculer u_1 , u_2 et u_3 .
2. On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 2$.
 - a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b. Exprimer v_n en fonction de n , en déduire que $u_n = 5 \left(\frac{2}{5}\right)^n + 2$.
 - c. Quelle est la limite de la suite (u_n) ?
3. Soit f la fonction définie sur \mathbb{R}^+ par $f(x) = \frac{2x + 6}{5}$.
 - a. Tracer la représentation graphique D de f dans le repère ci-dessous.
 - b. Placer, sur l'axe des abscisses, le point P_0 d'abscisse u_0 . En utilisant la droite D et la droite Δ d'équation $y = x$, construire les points P_1 , P_2 et P_3 de l'axe des abscisses et d'abscisses respectives u_1 , u_2 et u_3 .
 - c. À quoi correspond le point d'intersection de D et Δ ?

