CORRECTION PARTIELLE
ETUDE DE FONCTIONS – FONCTIONS COMPOSEES - 1ère S

Exercice 1 : Calcul de composées

Soit f la fonction définie par f(x)= x²-3. Soit g la fonction définie sur par g(x)= $\frac{1}{x+1}$

1. Df= ℝ et Dg= ℝ/{-1}
2. Variations
   a. La fonction carrée est croissante sur ℝ+ et décroissante sur ℝ- donc de même pour f puisque c'est la somme de la fonction carrée et d'une constante (ici -3)
   b. La fonction g est décroissante sur] -∞ ;-1[et sur]-1 ;+ ∞[.
   Pour le démontrer on peut
   - Soit utiliser le fait que g est la composée de la fonction affine x→ x+1 (croissante sur ℝ) et de la fonction inverse. (c'est long)

   - Soit dire que sa courbe s'obtient par translation de celle de la fonction inverse i par le vecteur (- $\vec{i}$) puisque g(x)=i(x+1) et donc on translate de 1 vers la gauche l'intervalle, de ce fait g est décroissante sur] -∞ ;-1[et sur]-1 ;+ ∞[.

   - Soit tout redémontrer, prendre a<b avec a et b dans]-1 ;+ ∞[puis dans] -∞ ;-1[…..
3. On obtient Dfog = ℝ/{-1} et (fog)(x) = $(\frac{1}{x+1})^2$ -3
4. On obtient Dgof = ℝ/{-$\sqrt{2}$; $\sqrt{2}$} et (fog)(x) = $\frac{1}{x^2-2}$

Exercice 2 : Déterminer un sens de variation

1. Déterminer le sens de variation de f définie sur]-3 ;+ ∞[par f(x) = $\frac{1}{x+3}$

La fonction f est décroissante sur]-3 ;+ ∞[.
Pour le démontrer on peut
- Soit utiliser le fait que f est la composée de la fonction affine u : x→ x+3 (croissante sur ℝ) et de la fonction inverse i.
  Donc si x ∈]-3 ;+ ∞[, x+3>0 et u(x)>0 et u croissante sur]-3 ;+ ∞[,
  u(x)>0 si x ∈]-3 ;+ ∞[. et i décroissante sur]0 ;+ ∞[
  Donc f décroissante sur]-3 ;+ ∞[car composée d'une fonction décroissante et d'une fonction croissante.

- Soit dire que sa courbe s'obtient par translation de celle de la fonction inverse i par le vecteur (-3 $\vec{i}$) puisque f(x)=i(x+3) et donc f décroissante sur]-3 ;+ ∞[(on translate de 3 vers la gauche l'intervalle)

- Soit tout redémontrer, prendre a<b avec a et b dans]-3 ;+ ∞[puis dans] -∞ ;-3[…..

2. Soit g la fonction définie sur]-3 ; + ∞ [par g(x) = $\frac{x+1}{x+3}$
   a. On trouve a=1 et b=-2 donc g(x) = 1 – $\frac{2}{x+3}$
   b. g= 1 – 2f
   or f est décroissante sur]-3 ;+ ∞[, donc (-2f) est croissante sur]-3 ;+ ∞[de ce fait 1-2f= g est croissante sur]-3 ;+ ∞[.
3. Par quelle transformation passe-t-on du graphe de la fonction h : x → -$\frac{2}{x}$
   à celui de g ?

Il faut remarquer que g(x) = h(x+3)+1 donc on passe de Ch à Cg par la translation de vecteur (-3 $\vec{i}$ + $\vec{j}$)