DECF

SESSION 2002

1\3

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET INFORMATIQUE

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Éléments indicatifs de corrigé

PROBLÈME 1 - Première partie

1. $A \times U = \begin{pmatrix} 10x + 3y \\ 5x + 12y \end{pmatrix}$; $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

2. **a.** $(S) \Leftrightarrow A \times U = W$.

b. $x = 2\,100$; $y = 500$. *Accepter toute méthode. Accepter également que seul le résultat soit donné (calcul effectué à la calculatrice).*

PROBLÈME 1 - Deuxième partie

1. Les quatre premières contraintes sont évidentes.
Pour les deux autres, on sait que :
- le café de « Qualité courante » est composé de 1/3 d'arabica et 2/3 de robusta ;
- le café de « Qualité supérieure » est composé de 4/5 d'arabica et 1/5 de robusta.

Compte tenu des quantités disponibles de chaque type de grains, on a donc :

$\frac{2}{3}x + \frac{1}{5}y \leq 1\,500$ soit en multipliant les deux membres par 15 : $10x + 3y \leq 22\,500$;

$\frac{1}{3}x + \frac{4}{5}y \leq 1\,100$ soit en multipliant les deux membres par 15 : $5x + 12y \leq 16\,500$.

2. **a.** La forme canonique du programme linéaire à résoudre est :
Maximiser $px + 1{,}25py$ ou : maximiser $x + 1{,}25y$ (p est strictement positif),

$$\text{avec : } \begin{cases} 0 \leq x \leq 2\,000 & (1) \\ 0 \leq y \leq 600 & (2) \\ 10x + 3y \leq 22\,500 & (3) \\ 5x + 12y \leq 16\,500 & (4) \end{cases}$$

b. Le couple $(2\,100\,, 500)$ n'est pas un programme admissible car la contrainte (1) n'est pas vérifiée.

c. Le maximum est atteint au point A de coordonnées $x = 2\,000$, $y = \frac{1625}{3} \approx 541{,}67$. [*Accepter une valeur arrondie lue graphiquement.*] Voir figure page 4.

PROBLÈME 2 - Première partie

1. $Y \leadsto \mathcal{N}(600\,;\sigma)$

$P(450 < Y < 750) = \frac{3}{5}$ donne $2\Pi\left(\frac{150}{\sigma}\right) - 1 = 0{,}6$ d'où $\frac{150}{\sigma} \approx 0{,}84$ et $\sigma \approx 179$ tonnes.

2. **a.** $C = 3\,200X + 2\,900Y$.

b. $\mathrm{E}(C) = 3\,200\mathrm{E}(X) + 2\,900\mathrm{E}(Y) = 5\,580\,000$ €, et

$\sigma(C) = \sqrt{3\,200^2\,\mathrm{V}(X) + 2\,900^2\,\mathrm{V}(Y)} = \sqrt{3\,200^2 \times 250^2 + 2\,900^2 \times 176^2} \approx 948\,951$ €.

[car X et Y sont indépendantes]

c. $P(C > 6\,200\,000) \approx 0{,}26$.

PROBLÈME 2 - Deuxième partie

1. $F_{250} \sim \mathcal{N}\left(0{,}3\,;\sqrt{\dfrac{0{,}3\times 0{,}7}{250}}\right)$.

2. a. Le test adapté est un test d'hypothèse unilatéral.
On teste H_0: $p = 0{,}30$ contre H_1: $p < 0{,}30$ au seuil de 5 %.

Si H_0 est vraie : $F_{250} \sim \mathcal{N}\left(0{,}3\,;\sqrt{\dfrac{0{,}3\times 0{,}7}{250}}\right)$.

$P(F_{250} < k) = 0{,}05$ donne $\dfrac{0{,}3-k}{0{,}0289827...} = 1{,}645$ d'où $k = 0{,}2523$.

L'hypothèse H_0 sera rejetée si l'on observe, sur un échantillon de 250 points de vente, une proportion inférieure à 0,2523.

b. $\dfrac{60}{250} = 0{,}24$ et $0{,}24 < 0{,}2523$ donc on rejette H_0.

Accepter également le test bilatéral qui teste H_0: $p = 0{,}30$ *contre* H_1: $p \neq 0{,}30$.
Région d'acceptation de H_0 : $[0{,}3 - 1{,}96\times 0{,}0290\,;\,0{,}3 + 1{,}96\times 0{,}0290] = [0{,}2432\,;\,0{,}3568]$
Même conclusion car $0{,}24 < 0{,}2432$.
Pour ce test moins « adapté » à cette situation, le barème attribuera moins de points que pour le test unilatéral.

PROBLÈME 3

1. Seules les variables représentées par des points proches du cercle des corrélations peuvent être interprétées, donc les variables V_1, V_4 et V_6 ne peuvent pas être interprétées.

2. Le coefficient de corrélation linéaire entre la variable V_5 et la première composante principale est donné par la coordonnée sur l'axe 1 du point représentant la variable V_5.
On obtient environ 0,5 (le cercle des corrélations a pour rayon 1).

3. • Les variables V_5 et V_3 sont représentées par des points qui forment un angle droit avec O. Il n'y a donc aucune corrélation linéaire entre V_5 et V_3.

• Les variables V_2 et V_3 sont représentées par des points voisins l'un de l'autre. Il y a donc une forte corrélation linéaire entre V_2 et V_3.

PROBLÈME 2 - Deuxième partie

1. $F_{250} \sim \mathcal{N}\left(0{,}3\,;\,\sqrt{\dfrac{0{,}3 \times 0{,}7}{250}}\right)$.

2. **a.** Le test adapté est un test d'hypothèse unilatéral.

On teste $H_0 : p = 0{,}30$ contre $H_1 : p < 0{,}30$ au seuil de 5 %.

Si H_0 est vraie : $F_{250} \sim \mathcal{N}\left(0{,}3\,;\,\sqrt{\dfrac{0{,}3 \times 0{,}7}{250}}\right)$.

$P(F_{250} < k) = 0{,}05$ donne $\dfrac{0{,}3 - k}{0{,}0289827\ldots} = 1{,}645$ d'où $k = 0{,}2523$.

L'hypothèse H_0 sera rejetée si l'on observe, sur un échantillon de 250 points de vente, une proportion inférieure à 0,2523.

b. $\dfrac{60}{250} = 0{,}24$ et $0{,}24 < 0{,}2523$ donc on rejette H_0.

Accepter également le test bilatéral qui teste $H_0 : p = 0{,}30$ contre $H_1 : p \neq 0{,}30$.
Région d'acceptation de H_0 : $[0{,}3 - 1{,}96 \times 0{,}0290\,;\,0{,}3 + 1{,}96 \times 0{,}0290] = [0{,}2432\,;\,0{,}3568]$
Même conclusion car $0{,}24 < 0{,}2432$.
Pour ce test moins « adapté » à cette situation, le barème attribuera moins de points que pour le test unilatéral.

PROBLÈME 3

1. Seules les variables représentées par des points proches du cercle des corrélations peuvent être interprétées, donc les variables V_1, V_4 et V_6 ne peuvent pas être interprétées.

2. Le coefficient de corrélation linéaire entre la variable V_5 et la première composante principale est donné par la coordonnée sur l'axe 1 du point représentant la variable V_5.
On obtient environ 0,5 (le cercle des corrélations a pour rayon 1).

3. • Les variables V_5 et V_3 sont représentées par des points qui forment un angle droit avec O. Il n'y a donc aucune corrélation linéaire entre V_5 et V_3.

• Les variables V_2 et V_3 sont représentées par des points voisins l'un de l'autre. Il y a donc une forte corrélation linéaire entre V_2 et V_3.