DECF

SESSION 2002

1/7

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET INFORMATIQUE

SUJET DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures. – COEFFICIENT : 0,5

Matériel autorisé :

Une calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante et sans aucun moyen de transmission à l'exclusion de tout autre élément matériel ou documentaire (circulaire n° 99-186 du 16 novembre 1999 ; BOEN n° 42).

Document remis au candidat.

Le sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6, et 1 encart.

Il vous est demandé de vérifier que le sujet est complet dès sa mise à votre disposition.

BARÈME INDICATIF :

Premier problème	première partie :	3 points
	deuxième partie :	6 points
Deuxième problème	première partie :	3 points
	deuxième partie :	5 points
Troisième problème		3 points

Les trois problèmes qui constituent le sujet peuvent être traités indépendamment les uns des autres.

Chaque candidat dispose de deux feuilles de papier millimétré, dont ***une seule est à rendre avec la copie.***
Une table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est fournie en annexe I.

AVERTISSEMENT

Si le texte du sujet, de ses questions ou des ses annexes, vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner *explicitement* dans votre copie.

Les problèmes 1 et 2 concernent la Société AROM'ART, qui fabrique et commercialise deux types de café : « Qualité courante » et « Qualité supérieure ».

PROBLÈME 1

PREMIÈRE PARTIE

On considère les matrices suivantes :

$$A=\begin{pmatrix}10 & 3\\ 5 & 12\end{pmatrix}\ ;\ B=\begin{pmatrix}4/35 & -1/35\\ -1/21 & 2/21\end{pmatrix}\ ;\ U=\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\ ;\ W=\begin{pmatrix}22\,500\\ 16\,500\end{pmatrix}.$$

Travail à faire par le candidat

1. **Effectuer le produit matriciel** $A\times U$.
   Calculer le produit matriciel $A\times B$ (*le détail des calculs n'est pas exigé*).

On considère le système d'équations (S) suivant : $\begin{cases}10x+3y=22\,500\\ 5x+12y=16\,500.\end{cases}$

Travail à faire par le candidat

2. **a. Donner une écriture matricielle du système** (S).
   b. Résoudre le système (S).

DEUXIÈME PARTIE

Chacun des deux types de café de la Société AROM'ART est un mélange composé de deux variétés de grains : « ARABICA » et « ROBUSTA ».
Le café de « Qualité courante » contient deux fois plus de grains « ROBUSTA » que de grains « ARABICA », alors que le café de « Qualité supérieure » contient quatre fois plus de grains « ARABICA » que de grains « ROBUSTA ».
On admettra que les grains de café ont tous un poids identique.
Pour l'année à venir :

- la Société disposera de 1 500 tonnes de grains « ROBUSTA » et de 1 100 tonnes de grains « ARABICA » ;

- la Société décide de ne pas dépasser une production de 2 000 tonnes de café de « Qualité courante », et de 600 tonnes de café de « Qualité supérieure » ;

- si on désigne par p la marge sur coûts variables par tonne de café vendu de « Qualité courante », la marge sur coûts variables par tonne de café vendu de « Qualité supérieure » est égale à $1{,}25p$;

- on suppose que la Société parviendra à vendre toute sa production.

On note : x la quantité produite pour l'année à venir (en tonnes) de café de « Qualité courante »,
y la quantité produite pour l'année à venir (en tonnes) de café de « Qualité supérieure ».

Travail à faire par le candidat

1. Justifier que x et y sont soumis aux contraintes suivantes :

- $x \geq 0$; $y \geq 0$;
- $x \leq 2\,000$; $y \leq 600$;
- $10x + 3y \leq 22\,500$;
- $5x + 12y \leq 16\,500$.

L'objectif des questions suivantes est de déterminer les quantités x et y qu'il faut produire pour maximiser la marge sur coûts variables totale.

2. a. Formuler le problème sous la forme canonique d'un programme linéaire.

b. Le couple (x, y) solution du système (S) de la première partie de ce problème est-il un programme admissible ? Justifier la réponse.

c. En utilisant la méthode de résolution graphique, déterminer les quantités x et y qu'il faut produire pour maximiser la marge sur coûts variables totale. *On utilisera, sur le papier millimétré fourni, les unités suivantes :*

en abscisse : 1 cm pour 200 tonnes ;
en ordonnée : 1 cm pour 100 tonnes.

PROBLÈME 2

Ce problème ne concerne que le café de « Qualité courante ».

PREMIÈRE PARTIE

La production de café de « Qualité courante » est écoulée en partie sur le marché national et en partie à l'étranger. Les quantités X et Y, exprimées en tonnes, de ce type de café, annuellement vendues, respectivement sur le marché national et sur le marché étranger, constituent deux variables aléatoires indépendantes suivant chacune une loi normale.

D'après le responsable des ventes, l'espérance mathématique de la variable aléatoire Y est de 600 tonnes.

Il estime par ailleurs que la probabilité pour que la quantité Y soit comprise entre 450 et 750 tonnes est égale à $\frac{3}{5}$.

Travail à faire par le candidat

1. Dans ces conditions, déterminer, à 1 tonne près, l'écart type de la variable aléatoire Y.

Une étude plus approfondie du service commercial a permis d'établir que, pour l'année à venir :
- la variable aléatoire X suit une loi normale d'espérance mathématique 1 200 tonnes et d'écart type 250 tonnes ;
- la quantité Y suit en fait une loi normale d'espérance mathématique 600 tonnes et d'écart type 176 tonnes ;
- le prix de vente de la tonne pour l'année à venir est égal à 3 200 euros sur le marché national et à 2 900 euros sur le marché étranger.

On désigne par C le chiffre d'affaires annuel, exprimé en euros, pour l'année à venir, sur le café de « Qualité courante ».

Travail à faire par le candidat

2. a. Exprimer C en fonction de X et de Y.

b. Déterminer l'espérance mathématique et l'écart type de C.

c. En admettant que C suit une loi normale, déterminer, à 10^{-2} près, la probabilité que le chiffre d'affaires annuel réalisé sur le café de « Qualité courante » dépasse 6,2 millions d'euros.

DEUXIÈME PARTIE

Selon le responsable des ventes, la fréquence, parmi les points de vente possibles à l'étranger, de ceux qui commercialisent la marque AROM'ART, est égale à 0,30.

Travail à faire par le candidat

1. On se place dans l'hypothèse où cette fréquence est effectivement égale à 0,30.
On considère que la loi de probabilité de la variable aléatoire qui, à tout échantillon de 250 points de vente possibles, associe la proportion de ceux qui commercialisent la marque AROM'ART, est une loi normale. **Déterminer les paramètres de cette loi.**

2. L'affirmation du responsable des ventes paraît optimiste au service commercial, qui décide de tester, au seuil de signification de 5 %, cette hypothèse d'une fréquence égale à 0,30, en observant un échantillon de 250 points de vente.

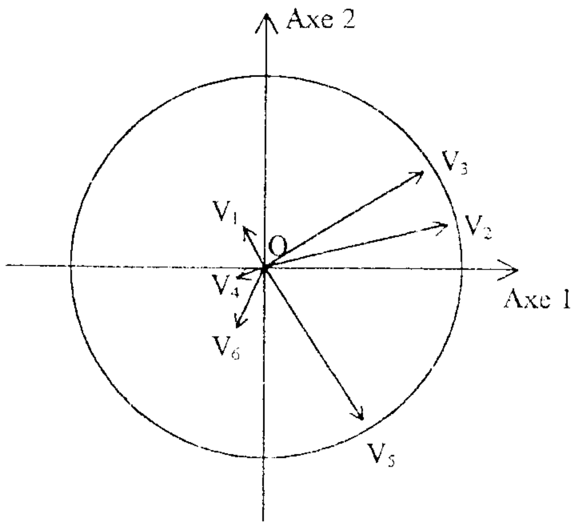
a. Construire un test d'hypothèse adapté à cette situation.

b. Le service commercial met en œuvre le test précédent sur un échantillon de 250 points de vente ; parmi eux, 60 commercialisent la marque AROM'ART
Quelle sera la conclusion de ce service ?

PROBLÈME 3

Un échantillon de 40 grandes entreprises d'activités comparables a été étudié sous l'angle de 6 variables. Une analyse en composantes principales (ACP) a été réalisée sur les données centrées réduites. On a obtenu la représentation graphique suivante des 6 variables étudiées :

Cercle des corrélations



Travail à faire par le candidat

1. Citer toutes les variables qui ne peuvent pas être interprétées sur cette représentation graphique. Justifier brièvement la réponse.

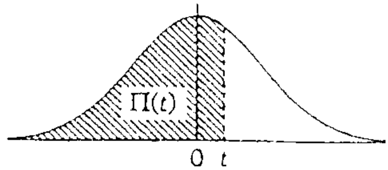
2. Déterminer graphiquement une valeur approchée du coefficient de corrélation linéaire entre la variable V_5 et la première composante principale.

3. Y a-t-il corrélation linéaire entre les variables V_5 et V_3 d'une part, et entre les variables V_2 et V_3 d'autre part.

ANNEXE I

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

Probabilité cumulée $\Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(u)\,du = P(T \leq t)$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	09236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Cas des grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour $t \geq 0$. Si t est négatif on prend le complément à l'unité de la valeur lue dans la table. $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$.