420 106bis

DECF

1/6

SESSION 2004

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET INFORMATIQUE

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

Éléments indicatifs de corrigé et barème national

Très important : Une erreur de calcul ne doit pas être pénalisée plusieurs fois ; donc les résultats cohérents avec les valeurs précédentes doivent être acceptés.

PROBLÈME 1 (7 points)

1. $140 \times 200 + 90 \times 160 + 70 \times 300 = \mathbf{63\,400€}$.

0,25 point

2. **Minimiser** $Z = 3\,840a + 3\,960b + 2\,880c$ avec $a \geq 0, b \geq 0, c \geq 0$ sous les contraintes :

$$\begin{cases} 15a + 16b + \ 9c \geq 200 \\ 15a + \ 8b + 24c \geq 160 \\ 20a + 24b + 12c \geq 300 \end{cases}$$

1,50 point *: 0,25 pour la positivité*
0,75 : soit 0,25 pour chaque inégalité (avec ≥)
0,25 pour la fonction économique
0,25 pour minimiser

3. **Forme canonique du dual** :
Maximiser $Z' = 200x + 160y + 300z$ avec $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$,

sous les contraintes : $\begin{cases} 15x + 15y + 20z \leq 3\,840 \\ 16x + \ 8y + 24z \leq 3\,960 \\ 9x + 24y + 12z \leq 2\,880 \end{cases}$

Forme standard du dual :
Maximiser $Z' = 200x + 160y + 300z$ avec $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0, e_1 \geq 0, e_2 \geq 0, e_3 \geq 0$,

sous les contraintes : $\begin{cases} 15x + 15y + 20z + e_1 = 3\,840 \\ 16x + \ 8y + 24z + e_2 = 3\,960 \\ 9x + 24y + 12z + e_3 = 2\,880 \end{cases}$

1,50 point *: 0,75 : soit 0,25 pour chaque inégalité (avec ≤)*
0,25 pour la fonction économique
0,25 pour maximiser
0,25 pour la forme standard
Remarque *: Si seule la forme standard est fournie : 1,25 point avec la répartition ci-dessus.*

4.

	x	y	z	e_1	e_2	e_3	R	
e_1	15	15	20	1	0	0	3 840	3 840/20 = 192
e_2	16	**8**	24	0	1	0	3 960	3 960/24 = **165**
e_3	9	24	12	0	0	1	2 880	2 880/12 = 240
Z'	200	160	**300**	0	0	0	0	

Variable entrante : z. **Variable sortante** : e_2.

	x	y	z	e_1	e_2	e_3	R
e_1	5/3	25/3	0	1	−5/6	0	540
z	2/3	1/3	1	0	1/24	0	165
e_3	1	20	0	0	−1/2	1	900
Z'	0	60	0	0	−12,5	0	−49 500

1,75 point : *0,5 pour le tableau de départ*
0,25 pour l'entrante (accepter la seule mise en évidence dans le tableau)
0,25 pour la sortante (accepter la seule mise en évidence dans le tableau)
0,75 pour le deuxième tableau

5. **a.** Dans le troisième tableau, tous les **coefficients de la ligne de Z' sont négatifs ou nuls**, donc l'optimum est atteint.
Pour minimiser ses coûts, la SSV doit acheter : **0 lot A, 11 lots B et 3 lots C.**
[*Accepter toute méthode conduisant à ce résultat : lecture directe dans la dernière ligne du tableau* 3 ou *résolution à partir de la solution du dual*].

1 point :	*0,25 pour justifier que l'optimum est atteint* *0,75 : soit 0,25 par chacune des trois réponses*

b. Prix minimum **: 52 200 €.**
Rabais obtenu par rapport au prix du marché traditionnel : **17,67 %.**

0,5 point :	*0,25 pour 52 200* *0,25 pour le pourcentage arrondi correctement*

c. La SSV aura seulement **3 m^3 de chêne en trop.**

0,5 point

PROBLÈME 2 (10 points)

On ne pénalisera qu'une seule fois (0,25 point) l'ensemble des erreurs d'arrondi.

PARTIE A (4,5 points)

1. Pour un œuf : D l'événement "présenter des défauts" et A "être accepté au contrôle".

$$P(A)=P\left((D\cap A)\cup(\bar{D}\cap A)\right)=P(D\cap A)+P(\bar{D}\cap A)=P(D)\times P(A/D)+P(\bar{D})\times P(A/\bar{D})$$

$$=0{,}05\times 0{,}04+0{,}95\times 0{,}98=\mathbf{0{,}933}.$$

1,25 point *:*	*0,75 pour la réponse* *0,50 pour une justification (arbre, tableau, formules, etc.)*

2. $P(D/A)=\dfrac{P(D\cap A)}{P(A)}=\dfrac{0{,}05\times 0{,}04}{0{,}933}\approx \mathbf{0{,}002}.$

0,75 point *pour la réponse justifiée*

3. a. On **répète 100 fois** de suite l'épreuve de Bernoulli : "examiner un œuf qui a été accepté au contrôle".

Chaque épreuve a **2 issues** : - succès : l'œuf a des défauts (avec la probabilité $p=0{,}002$) ;
ou - échec : l'œuf n'a pas de défaut (avec la probabilité $q=1-p=0{,}998$).

Les épreuves sont **indépendantes** (tirages au hasard dans une population supposée grande), et N est le **nombre de succès** obtenus à l'issue des 100 tirages, N **suit donc la loi binomiale de paramètres** $n=\mathbf{100}$ **et** $p=\mathbf{0{,}002}$.

1,50 point :	*0,75 pour la loi et ses deux paramètres* *0,75 pour la justification (répétition, deux issues, indépendance)*

b. $P(N\geq 1)=1-P(N=0)=1-0{,}998^{100}\approx \mathbf{0{,}181}.$

1 point *:*	*0,25 pour $P(N\geq 1)$* *0,25 pour passage au complémentaire* *0,5 pour le résultat*

PARTIE B (5,5 points)

1. a. $C_V=0{,}15+0{,}01X$, $C_G=0{,}018Y$, **et** $C_T=\dfrac{0{,}2}{20}+0{,}15+0{,}01X+0{,}018Y=0{,}16+0{,}01X+0{,}018Y.$

1 point :	*0,25 pour C_V* *0,25 pour C_G* *0,5 pour C_T (0,25 si uniquement en fonction de C_V et C_G)*

b. Espérances : $\mathrm{E}(C_V)=\mathrm{E}(0{,}15+0{,}01X)=0{,}15+0{,}01\,\mathrm{E}(X)=0{,}15+0{,}01\times 50=\mathbf{0{,}65}$;

$\mathrm{E}(C_G)=\mathrm{E}(0{,}018Y)=0{,}018\,\mathrm{E}(Y)=0{,}018\times 78=\mathbf{1{,}404}.$

Variances et écarts types :

$\mathrm{V}(C_V)=V(0{,}15+0{,}01X)=0{,}01^2\,V(X)=0{,}01^2\times 3^2$ donc écart type de C_V : **0,03 ;**

$\mathrm{V}(C_G)=V(0{,}018Y)=0{,}018^2\,V(Y)=0{,}018^2\times 4^2$ donc écart type de C_G : $0{,}018\times 4=\mathbf{0{,}072}$.

C_V **suit la loi normale de paramètres 0,65 et 0,03 et** C_G **la loi normale de paramètres 1,404 et 0,072.**

1 point : *0,25 pour chacun des quatre paramètres*

c. -Paramètres de C_T :

Espérance mathématique :

$E(C_T) = E(0{,}16 + 0{,}01X + 0{,}018Y) = 0{,}16 + 0{,}01E(X) + 0{,}018E(Y) = \mathbf{2{,}064}$.

Variance :

$V(C_T) = V(0{,}16 + 0{,}01X + 0{,}018Y) = 0{,}01^2\, V(X) + 0{,}018^2\, V(Y) = 0{,}006084$ car X et Y sont **indépendantes**.

Écart type de C_T : $\sqrt{0{,}006084} \approx \mathbf{0{,}078}$.

0,5 point *: 0,25 pour chacun des deux paramètres (on n'exigera pas la référence à l'indépendance)*

d. $P(C_T < 2{,}1) = \Pi\left(\dfrac{2{,}1 - 2{,}064}{0{,}078}\right) = \Pi(0{,}46) = \mathbf{0{,}677}$.

[ou **0,678** si on effectue le calcul avec une calculatrice et non avec la table fournie (meilleure précision)].

1 point :	*0,5 point pour* $\Pi(0{,}46)$
	0,5 pour le résultat

e. Marge sur la vente **d'un** œuf garni = $\dfrac{50}{20} - C_T = 2{,}5 - C_T$.

$P(2{,}5 - C_T > 0{,}4) = P(C_T < 2{,}5 - 0{,}4) = P(C_T < 2{,}1) = \mathbf{0{,}677}$.

[On peut aussi établir que $2{,}5 - C_T$ suit $N(0{,}436 ; 0{,}078)$ et utiliser cette loi]

0,5 point

2. a. $C = C_T^1 + C_T^2 + \cdots\cdots + C_T^{20}$ où C_T^i = coût unitaire du $i^{\text{ème}}$ œuf d'une boîte.

C est somme de 20 variables aléatoires **indépendantes** de loi normale de paramètres 2,064 et 0,078, donc C suit une loi normale.

Espérance : $E(C) = E(C_T^1 + C_T^2 + \cdots\cdots + C_T^{20}) = E(C_T^1) + E(C_T^2) + \cdots\cdots + E(C_T^{20}) = 20 \times 2{,}064 = \mathbf{41{,}28}$.

Variance : $V(C) = V(C_T^1 + C_T^2 + \cdots\cdots + C_T^{20}) = V(C_T^1) + V(C_T^2) + \cdots\cdots + V(C_T^{20}) = 20 \times 0{,}078^2 = \mathbf{0{,}12168}$ car les C_T^i sont **indépendantes.**

Écart type de C : $\sqrt{0{,}12168} \approx \mathbf{0{,}349}$. **$C$ suit la loi normale de paramètres 41,28 et 0,349.**

0,75 point :	*0,25 pour l'espérance*
	0,5 pour l'écart type
	On n'exigera pas la justification du caractère normal de C.

b. Marge sur la vente d'une boîte = $50 - C$.

$P(50 - C > 8) = P(C < 42) = \Pi(2{,}06) = \mathbf{0{,}980}$. [On peut aussi établir que $50 - C$ suit $N(8{,}72 ; 0{,}349)$ et utiliser cette loi.]

0,75 point :	*0,25 pour* $P(C < 42)$
	0,25 pour $\Pi(2{,}06)$
	0,25 pour le résultat

PROBLÈME 3 (3 points)

1. Les représentations obtenues sont **satisfaisantes** puisqu'elles restituent **82 %** de l'inertie totale du nuage.

***0,5 point** pour une réponse justifiée*

2. Toutes les variables sont représentées par des **points proches du cercle des corrélations** et peuvent donc être interprétées.

Sur l'ensemble de cette question 2, pénaliser une fois de 0,25 point l'absence de référence à la qualité de la représentation des variables

a. **A** et **D** forment avec le centre du cercle un **angle presque plat** et présentent donc une corrélation linéaire **négative forte** ;

***0,5 point** :*	*0,25 pour la réponse* *0,25 pour la justification*

b. **D** et **P** forment avec le centre du cercle un **angle presque droit** et présentent donc une corrélation linéaire **faible ;**

***0,5 point** :*	*0,25 pour la réponse* *0,25 pour la justification*

c. **P** et **S** forment avec le centre du cercle un **angle presque nul** et présentent donc une corrélation linéaire **positive forte.**

***0,5 point** :*	*0,25 pour la réponse* *0,25 pour la justification*

3. L'axe 1 semble **opposer** les appartements **loin du centre ville (à gauche) aux appartements anciens situés dans un quartier de haut standing (à droite).**

0,25 point

4. Il faut proposer à l'acheteur l'appartement **2** qui est **à gauche** sur le plan principal représentant le nuage des appartements (alors que le 17 est à droite). En effet, d'après les positions de **D** et **A** sur le cercle des corrélations, cet appartement est loin du centre et n'est pas ancien.
Il devrait alors se trouver dans un quartier de standing **peu élevé** d'après la position de **Q** sur le cercle des corrélations.

0,75 point :	*0,25 pour le choix de l'appartement 2* *0,25 pour la justification du choix ci-dessus* *0,25 pour la réponse justifiée (standing)*