420 106

DECF

SESSION 2004

1/6

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET INFORMATIQUE

SUJET DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures. - COEFFICIENT : 0,5

Matériel autorisé :

Une calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante et sans aucun moyen de transmission à l'exclusion de tout autre élément matériel ou documentaire (circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999 ; BOEN n°42).

Document remis au candidat.

Le sujet comporte 6 pages, numérotées de 1 à 6.

Il vous est demandé de vérifier que le sujet est complet dès sa mise à votre disposition.

BARÈME INDICATIF :

Premier problème	7 points
Deuxième problème	10 points
Troisième problème	3 points

Les trois problèmes qui constituent le sujet peuvent être traités indépendamment les uns des autres.

Une table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est fournie en annexe 1.

AVERTISSEMENT

Si le texte du sujet, de ses questions ou des ses annexes, vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner *explicitement* dans votre copie.

PROBLÈME 1

La Société des Scieries Vosgiennes (SSV) souhaite s'approvisionner en bois de différentes essences courantes. Compte tenu de la demande actuelle en bois scié, elle souhaite acquérir au moins 200 m^3 de chêne, au moins 160 m^3 de hêtre, et au moins 300 m^3 de sapin.

Les prix au m^3 sur le marché traditionnel sont de 140 euros pour le chêne, 90 euros pour le hêtre et 70 euros pour le sapin.

Mais la SSV peut aussi profiter des offres de certains exploitants forestiers dont les forêts ont été dévastées par la tempête du 26 décembre 1999, et qui proposent par lots, à moindre coût, du bois de qualité équivalente.

Trois offres ont été sélectionnées.

Offre A : lots de 15 m^3 de chêne, 15 m^3 de hêtre, 20 m^3 de sapin. Prix d'un lot : 3 840 euros.
Offre B : lots de 16 m^3 de chêne, 8 m^3 de hêtre, 24 m^3 de sapin. Prix d'un lot : 3 960 euros.
Offre C : lots de 9 m^3 de chêne, 24 m^3 de hêtre, 12 m^3 de sapin. Prix d'un lot : 2 880 euros.

Travail à faire

1. Déterminer le prix de la quantité de bois que souhaite acquérir la SSV, si elle se fournit sur le marché traditionnel et achète les quantités minimales qu'elle désire acquérir.

L'objectif des questions suivantes est de déterminer si la SSV a intérêt à se fournir sur le marché traditionnel ou à profiter des offres sélectionnées. On supposera dans ce qui suit qu'elle choisit d'acheter uniquement des lots A, B *et* C.

2. En notant respectivement a, b et c les quantités de lots A, B et C à acheter pour obtenir la quantité de bois désirée, écrire la forme canonique du programme P, établissant les contraintes et la fonction économique Z à minimiser pour satisfaire la SSV.

3. Écrire, sous forme canonique puis sous forme standard, le programme P', dual du programme P. On notera x, y et z les variables duales, e_1, e_2 et e_3 les variables d'écart du programme dual, et Z' la fonction économique du programme dual.

4. Établir les deux premiers tableaux permettant de résoudre le programme P' par la méthode du simplexe. Indiquer soigneusement les variables entrantes et sortantes dans le premier tableau.

5. Le troisième tableau est le suivant :

	x	y	z	e_1	e_2	e_3	R
e_1	5/4	0	0	1	−5/8	−5/12	165
z	13/20	0	1	0	1/20	−1/60	150
y	1/20	1	0	0	−1/40	1/20	45
Z'	−3	0	0	0	−11	−3	−52 200

a. Montrer que ce tableau correspond à l'optimum, et déterminer les nombres de lots A, B et C que la SSV doit acheter pour minimiser ses coûts.

b. Indiquer le prix minimum à payer par la SSV pour satisfaire ses besoins. Quel est alors, en pourcentage, le rabais obtenu par rapport au prix du marché traditionnel ?

c. Si la SSV décide d'acheter les nombres de lots A, B et C lui permettant de minimiser ses coûts, la quantité de bois achetée correspond-elle exactement à la quantité souhaitée ?

PROBLÈME 2

3/6

Les deux parties de ce problème sont indépendantes.
Dans tout le problème, les probabilités demandées seront données à 10^{-3} *près.*

La société Chocolor produit pour Pâques des œufs en chocolat garnis d'un assortiment de bonbons.

PARTIE A

Avant d'être garnis et emballés, les œufs sont soumis à un contrôle visuel. On suppose que 5 % des œufs présentent des défauts qui les rendent impropres à la commercialisation. Ces œufs sont rejetés au contrôle avec une probabilité de 96 %. Il arrive aussi, avec une probabilité de 2 %, que des œufs sans défaut soient rejetés au contrôle.

Travail à faire

1. Quelle est la probabilité qu'un œuf soit accepté au contrôle ?

2. Sachant qu'un œuf a été accepté au contrôle, quelle est la probabilité qu'il présente des défauts qui le rendent impropre à la commercialisation ?
On supposera pour la suite que cette probabilité vaut exactement 0,002.

3. On note N la variable aléatoire qui, à tout lot de 100 œufs pris au hasard parmi ceux <u>acceptés au contrôle</u>, associe le nombre d'entre eux qui présentent des défauts les rendant impropres à la commercialisation.

a. Déterminer la loi suivie par N et préciser ses paramètres.

b. Quelle est la probabilité que, sur 100 œufs pris au hasard parmi ceux acceptés au contrôle, au moins un présente des défauts qui le rendent impropre à la commercialisation ?

PARTIE B

La masse de chocolat, en grammes, d'un œuf vide est une variable aléatoire X qui suit la loi normale d'espérance mathématique 50 et d'écart type 3.

La masse de garniture pour un œuf est une variable aléatoire Y qui suit la loi normale d'espérance mathématique 78 et d'écart type 4.

On suppose que les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

Le chocolat utilisé pour la fabrication des œufs vides coûte 10 euros le kg, et le coût unitaire de fabrication, hors matière première, est estimé à 0,15 euro.

La garniture de bonbons coûte 18 euros le kg.

L'emballage d'une boîte de 20 œufs coûte 0,2 euro.

Les œufs garnis sont vendus aux détaillants au prix de 50 euros la boîte de 20.

On suppose que les masses des œufs garnis, dans une boîte, sont des variables aléatoires indépendantes.

On note : C_V le coût unitaire d'un œuf vide ;
C_G le coût de la garniture pour un œuf ;
et C_T le coût unitaire (en tenant compte du coût de l'emballage) d'un œuf garni.

On admet que les variables aléatoires C_V, C_G et C_T suivent des lois normales.

4|6

Travail à faire

1. a. Donner l'expression de C_V, de C_G et de C_T en fonction de X et Y.

b. Déterminer, en justifiant les réponses, les paramètres de C_V et C_G.

c. Démontrer que C_T a pour espérance mathématique 2,064 € et pour écart type 0,078 €.

d. Calculer la probabilité $P(C_T < 2{,}1)$.

e. Quelle est la probabilité que la marge sur la vente d'un œuf garni soit supérieure à 0,4 euro ?

2. On note C le coût total de fabrication d'une boîte de 20 œufs garnis (tenant compte du prix de l'emballage).

a. Expliquer pourquoi C suit une loi normale et déterminer ses paramètres.

b. Quelle est la probabilité que la marge sur une boite de 20 œufs garnis soit supérieure à 8 euros ?

PROBLÈME 3

La Chambre syndicale des agents immobiliers de la Moselle a réalisé une étude sur 20 appartements de 4 pièces, numérotés de 1 à 20, proposés à la vente sur la ville de Metz.
Les critères pris en compte pour cette étude sont les suivants :

- la **surface** en m², notée **S** ;
- le **prix**, en milliers d'euros, noté **P** ;
- le standing du **quartier**, selon une échelle de 1 à 15, noté **Q** (note 15 attribuée aux appartements de plus haut standing) ;
- les éléments de **confort**, tenant compte également de l'état de l'appartement, noté **C** ;
- la **distance** du centre ville, en km, notée **D** ;
- l'**âge** de la construction, en années, noté **A**.

Les données recueillies ont fait l'objet d'une analyse en composantes principales dont une partie des résultats figure en annexes 2 et 3.

Travail à faire

1. Les représentations obtenues sont-elles satisfaisantes ?

2. Utiliser le cercle des corrélations pour indiquer, en justifiant les réponses, si les variables suivantes présentent une corrélation linéaire positive forte, une corrélation linéaire négative forte ou une corrélation linéaire faible : a. A et D ;
b. D et P ;
c. P et S.

3. Quelle signification peut-on donner à l'axe 1 ?

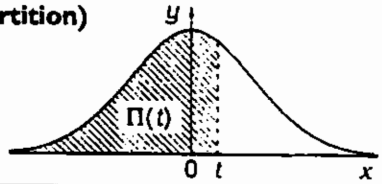
4. Un acheteur recherche un appartement loin du centre, de construction récente. Entre le 2 et le 17, sélectionnés par l'acheteur pour d'autres critères, lequel faut-il lui proposer ? Se trouvera-t-il alors dans un quartier de standing élevé ? *Justifier les réponses.*

ANNEXE 1

5/6

Loi normale centrée réduite (répartition)

Probabilité cumulée $\Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,\mathrm{d}x = P(T \leqslant t)$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

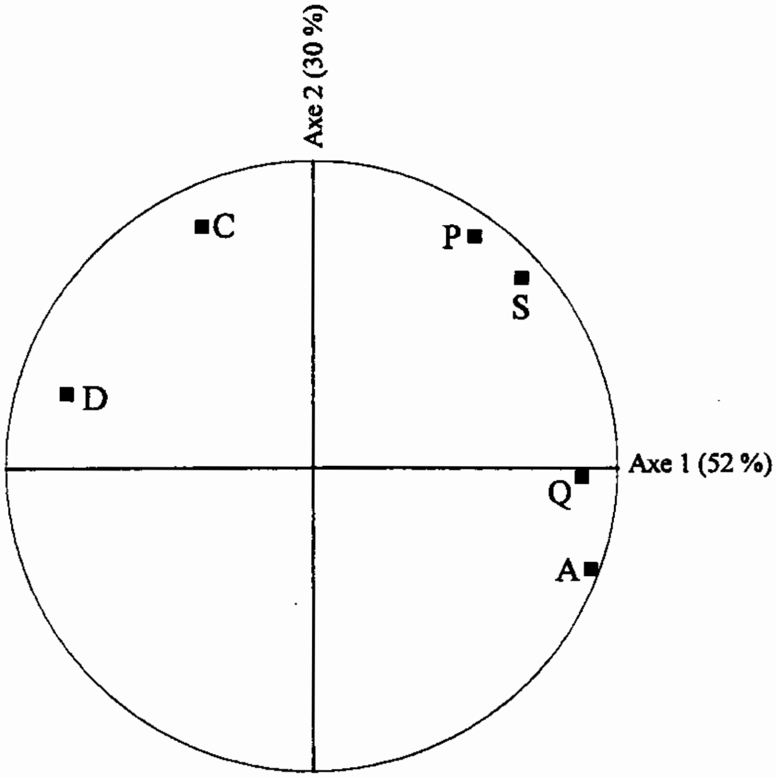
Cas des grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
$\Pi(t)$	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour $t \geqslant 0$. Si t est négatif on prend le complément à l'unité de la valeur lue dans la table. $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$.

ANNEXE 2

Cercle des corrélations : axes 1 et 2 (82 %)



ANNEXE 3

Représentation des appartements dans le plan principal (axes 1 et 2)