520 106

DECF

SESSION 2005

1/6

MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES ET INFORMATIQUE

SUJET DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

DURÉE : 2 heures. - COEFFICIENT : 0,5

Matériel autorisé :

Une calculatrice de poche à fonctionnement autonome, sans imprimante et sans aucun moyen de transmission à l'exclusion de tout autre élément matériel ou documentaire (circulaire n°99-186 du 16 novembre 1999 ; BOEN n°42).

Document remis au candidat.

Le sujet comporte 7 pages, numérotées de 1 à 7.

Il vous est demandé de vérifier que le sujet est complet dès sa mise à votre disposition.

BARÈME INDICATIF :

Premier problème	4 points
Deuxième problème	9 points
Troisième problème	7 points

Les trois problèmes qui constituent le sujet peuvent être traités indépendamment les uns des autres.

Une table de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite est fournie en *annexe 2*.

Chaque candidat dispose de deux exemplaires de l'*annexe 3*, dont **un seul** est **à rendre avec la copie.**

AVERTISSEMENT

Si le texte du sujet, de ses questions ou des ses annexes, vous conduit à formuler une ou plusieurs hypothèses, il vous est demandé de la (ou les) mentionner *explicitement* dans votre copie.

PROBLÈME 1

La coopérative "Les coteaux de l'Orbieu" a pour objet de vinifier et de commercialiser les raisins apportés par ses adhérents. Dans le but d'améliorer la qualité de sa production, elle a réalisé une enquête auprès d'un échantillon de 35 de ses viticulteurs. Cette enquête porte sur cinq variables quantitatives : ÂGE de la vigne, SUPERFICIE (nombre d'hectares cultivés), PALISSAGE (pourcentage de la superficie occupé par des vignes sur espaliers), AMÉLIORATEURS (pourcentage de la superficie planté avec des cépages améliorateurs de qualité) et SALARIÉS (nombre de salariés de l'exploitation, y compris l'adhérent).

L'enquête a été suivie d'une analyse en composantes principales normée.

Travail à faire

À partir des graphiques donnés en *annexe 1*, répondre aux questions suivantes :
Justifier brièvement les réponses.

1. **Pourquoi peut-on considérer que la représentation des adhérents dans le plan principal (Axe 1, Axe 2) est satisfaisante ?**

2. **Quelle signification peut-on donner (en termes de variables) :**
   - **à l' Axe 1 (du côté positif, c'est-à-dire à droite) ;**
   - **à l' Axe 2 (du côté positif, c'est-à-dire en haut) ;**
   - **à l' Axe 2 (du côté négatif, c'est-à-dire en bas) ?**

3. **En utilisant la question précédente, que peut-on dire de l'adhérent numéro 13, de l'adhérent numéro 24, et de l'adhérent numéro 25, sachant que la qualité de leur représentation dans le plan (Axe 1, Axe 2) est bonne ?**

4. **Interpréter la position relative, dans le cercle des corrélations, des points représentant les variables SALARIÉS et SUPERFICIE, puis des points représentant les variables SUPERFICIE et PALISSAGE.**

PROBLÈME 2

3/6

Tous les résultats demandés seront donnés à 10^{-2} *près.*

La coopérative "Les coteaux de l'Orbieu" a étudié le problème de la mise en bouteille.
En effet, des clients testent le niveau de remplissage des bouteilles.
On considère qu'une bouteille est mal remplie s'il manque au moins 1 centilitre par rapport au volume annoncé sur l'étiquette.
Le volume, exprimé en centilitres, de vin mis en bouteille par la machine est une variable aléatoire normale X d'espérance mathématique m et d'écart type σ.

Travail à faire

1. **On suppose, dans cette question, que $m = 75$ cl et $\sigma = 0{,}8$ cl.**
   Calculer le pourcentage de bouteilles insuffisamment remplies, c'est-à-dire contenant moins de 74 cl.

2. **Ce pourcentage est jugé trop élevé. Désormais, on souhaite que la probabilité qu'une bouteille soit insuffisamment remplie soit 0,01. Pour ce faire, on envisage deux méthodes.**

   a. <u>Première méthode</u> : augmenter l'espérance mathématique m au-delà de 75 cl en gardant le même écart type $\sigma = 0{,}8$ cl. Quelle doit être la valeur de m pour atteindre ce but ?
   b. <u>Deuxième méthode</u> : diminuer l'écart type σ en dessous de 0,8 cl en affinant les réglages et en gardant une espérance mathématique de 75 cl. Quelle doit être la valeur de σ pour atteindre ce but ?

3. La machine est réglée de sorte que la probabilité qu'une bouteille soit mal remplie est 0,01. Un client prélève au hasard 100 bouteilles parmi un grand nombre de bouteilles qui lui ont été livrées. (On pourra assimiler ce prélèvement à un tirage non exhaustif).

   a. Déterminer la loi suivie par la variable aléatoire N désignant le nombre de bouteilles mal remplies parmi 100 bouteilles ? Justifier la réponse et donner les paramètres de cette loi.
   b. Donner l'espérance mathématique et la variance de N.
   c. Calculer la probabilité que le client trouve au moins 2 bouteilles mal remplies parmi 100 bouteilles.

4. On approche la loi de N par une loi de Poisson.

   a. Donner son paramètre.
   b. Calculer, en utilisant cette approximation, la probabilité $P(N \geq 4)$.
   c. Quelle signification peut-on donner à ce résultat ?

Rappel
Si la variable aléatoire X suit la loi de Poisson de paramètre λ, on a :
$P(X = k) = \mathrm{e}^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$ pour tout entier naturel k.

PROBLÈME 3

La coopérative "Les coteaux de l'Orbieu" désire mettre en valeur des friches. Le but de l'opération est double : donner du travail à de jeunes viticulteurs et augmenter la qualité globale de la production en pratiquant un encépagement haut de gamme. On envisage la plantation de deux cépages A et B.

Le **total** des droits de plantation disponibles est de 800 hectares. D'autre part, comme la coopérative veut obtenir les aides européennes prévues à cet effet, la plantation **totale** ne peut être inférieure à 400 hectares.

Les contraintes agronomiques imposent la plantation maximale de 600 hectares de cépage A et de 500 hectares de cépage B.

Travail à faire

1. **En notant respectivement x et y les nombres d'hectares de cépage A et de cépage B à planter, traduire toutes les contraintes sous la forme d'un système d'inéquations.**

2. **Sur l'annexe 3 (à rendre avec la copie) représenter graphiquement ce système d'inéquations. On mettra en évidence la zone d'acceptabilité du système, c'est-à-dire l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\,;y)$ sont solutions du système.**

L'objectif est de rendre maximale la marge sur coûts variables (MCV) globale de la coopérative. Hélas ! cette MCV est très fluctuante avec le marché. La coopérative examine les trois cas particuliers suivants :

Cas A : la MCV sur un hectare de cépage A est de 5 000 € et la MCV sur un hectare de cépage B est de 7 000 €.
Cas B : la MCV sur un hectare de cépage A est de 7 000 € et la MCV sur un hectare de cépage B est de 5 000 €.
Cas C : la MCV sur un hectare de cépage A est de 6 000 € et la MCV sur un hectare de cépage B est de 6 000 €.

Travail à faire

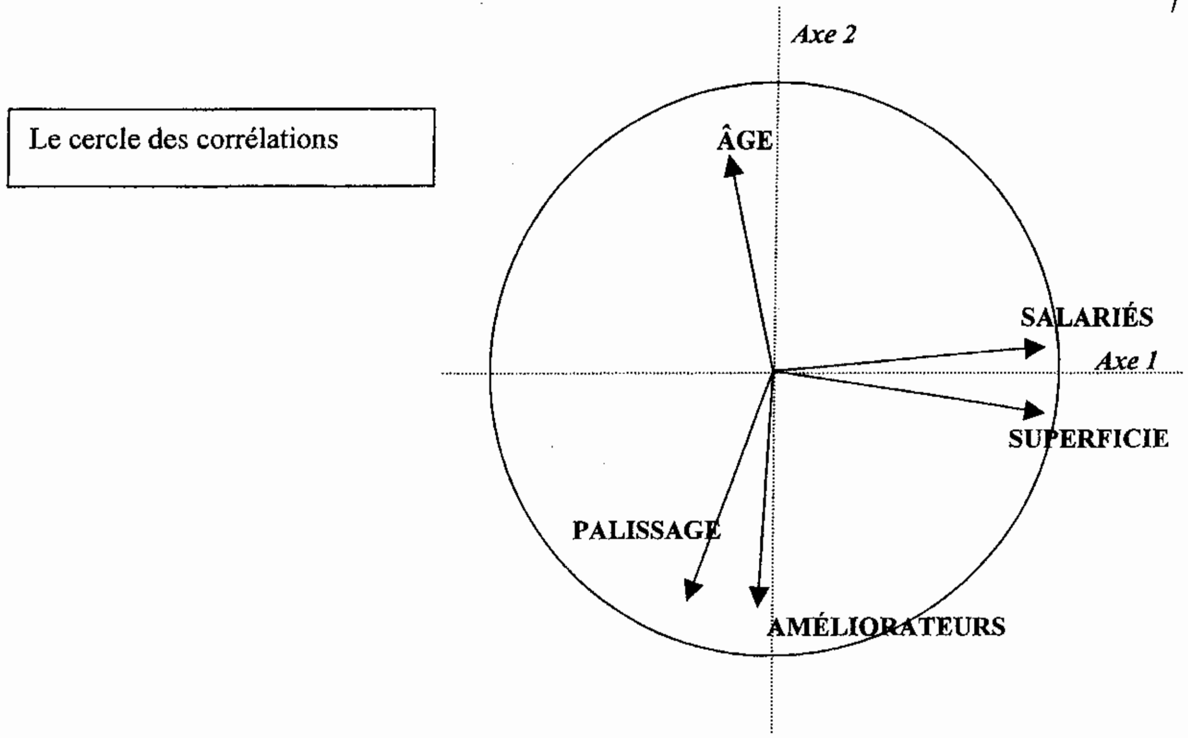
3. **Pour chacun de ces trois cas :**

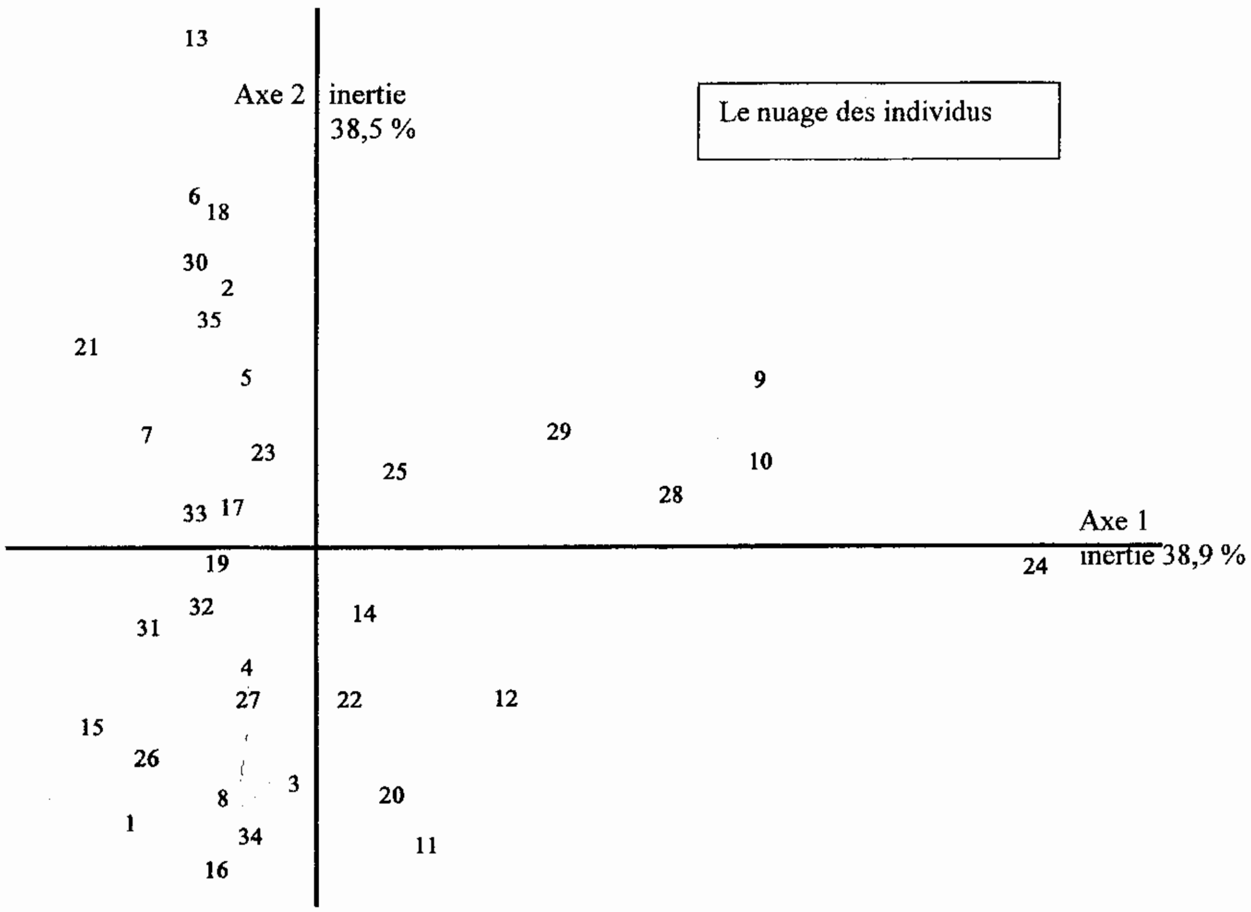
   a. donner, en fonction de x et de y, la fonction économique à maximiser ;
   [*On pourra utiliser les notations Z_A, Z_B, Z_C.*]

   b. déterminer la (ou les) solution(s) optimale(s) et la MCV maximale correspondante.

ANNEXE 1

5/6


Le cercle des corrélations
Axe 2
ÂGE
SALARIÉS
Axe 1
SUPERFICIE
PALISSAGE
AMÉLIORATEURS

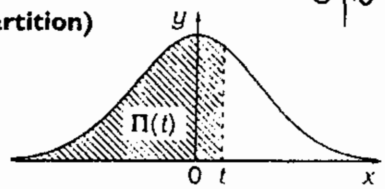

Axe 2 inertie 38,5 %
Le nuage des individus
Axe 1 inertie 38,9 %
13
6
18
30
2
35
21
5
9
7
29
23
10
25
28
33
17
19
24
32
14
31
4
27
22
12
15
26
3
8
20
1
34
11
16

ANNEXE 2

6|6

Loi normale centrée réduite (répartition)

Probabilité cumulée $\Pi(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx = P(T \leqslant t)$



t	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7290	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8254	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9779	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Cas des grandes valeurs de t

t	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,8	4,0	4,5
Π(t)	0,998 65	0,999 04	0,999 31	0,999 52	0,999 66	0,999 76	0,999 841	0,999 928	0,999 968	0,999 997

Nota : La table donne les valeurs de $\Pi(t)$ pour $t \geqslant 0$. Si t est négatif on prend le complément à l'unité de la valeur lue dans la table. $\Pi(-t) = 1 - \Pi(t)$.