Diagonalisation.

Polynôme caractéristique.

Définition : Soit $A \in M_n(K)$. On appelle polynôme caractéristique de A :

$$\boxed{\chi_A : X \to \chi_A(X) = \det(A - X.Id_n)}$$

Propriété. : $\boxed{\chi_A = (-1)^n X^n + (-1)^{n-1}.tr\,A\,.X^{n-1} + \cdots + \det A}$

Eléments propres.

Définitions :

- $\boxed{\boldsymbol{\lambda\ valeur\ propre\ de\ A} : \exists\, X \in M_{n,1}(K)\ \ tel\ que\ (X \neq 0\ et\ AX = \lambda X)}$
- $\boxed{\boldsymbol{X\ vecteur\ propre\ de\ A} : X \neq 0\ et\ \ (\exists\, \boldsymbol{\lambda}\ \in K\ telle\ que\ AX = \lambda X)}$
- **Spectre de A** = ensemble des valeurs propres de A
- **Sous-espace propre pour A associé à la vp λ de A :**
  $\boxed{SEP(A,\lambda) = Ker\ (A - \boldsymbol{\lambda}.Id_n)}$

Proposition :

- $\boxed{\boldsymbol{\lambda}\ \in Sp_K(A) \Leftrightarrow Ker\ (A - \boldsymbol{\lambda}.Id_n) \neq \{0\} \Leftrightarrow (A - \boldsymbol{\lambda}.Id_n)\ non\ inversible}$
- $\boxed{\boldsymbol{\lambda}\ \in Sp_K(f) \Leftrightarrow Ker\ (f - \boldsymbol{\lambda}.e) \neq \{0\} \Leftrightarrow (A - \boldsymbol{\lambda}.e)\ non\ iinjectif}$
- $\boxed{Sp_K(A) = {\chi_A}^{-1}(0)}$

Propriétés des SEP.

- **Ordre de multiplicité de λ, vp de A :** ordre de multiplicité ω de λ en tant que zéro du polynôme caractéristique χ_A.
- Si ω est l'ordre de multiplicité de la vp λ de A : $\boxed{1 \leq \dim[SEP(A,\lambda)] \leq \omega}$

Diagonalisation.

Définition :

$A \in M_n(K)$ diagonalisable ssi il existe une matrice diagonale $D \in M_n(K)$ telle A soit semblable à D.

$$\boxed{\exists\, P \in GL_n(K), \exists\, D \in D_n(K)\ \ telle\ que\ \ A = PDP^{-1}}$$

Proposition : les propriétés sont 2 à 2 équivalentes :

1. **A diagonalisable**.
2. Il existe une base de E formée des $\overrightarrow{vp}$ pour A.
3. La somme des SEP pour A est égale $E = K^n$
4. La somme des dimensions des SEP pour A est égale à $n = dim(E)$.

<u>Théorème</u> : CNS de diagonalisabilité

A diagonalisable ssi :	$\begin{cases} \chi_A \text{ est scindé sur } K \\ Pour\ chaque\ vp,\ dim[SEP(A,\lambda)] = \omega \end{cases}$

χ_A est scindé sur K signifie que χ_A s'écrit comme un produit de monômes à coeff. dans K.

<u>Théorème</u> : CS de diagonalisabilité

Si $A \in M_n(K)$ admet $n = dim(E)$ vp 2 à 2 distincts alors, A est diagonalisable.