

Espaces EUCLIDIENS.

Espace euclidien : e.v.de dimension finie muni d'un p.s.

Propriété : Tout ev euclidien admet au moins une BON.

Produit scalaire dans E un \mathbb{R} espace vectoriel.

On appelle *produit scalaire* sur E toute application $\varphi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que : pour tout vecteurs x, y et y' de E et k un réel.

- φ est symétrique : $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$
- φ est linéaire par rapport à la 2^{ème} variable : $\varphi(x, ky + y') = k \cdot \varphi(x, y) + \varphi(x, y')$
- φ est positive : $\varphi(x, x) \geq 0$
- φ est définie : $\varphi(x, x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

On dit qu'un produit scalaire sur un \mathbb{R} -ev est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

On note souvent : $\varphi(x, y) = (x | y) = \langle x, y \rangle = \langle x | y \rangle = x \cdot y$

On définit alors la norme du vecteur x : $\|x\| = \sqrt{\varphi(x, x)}$

Et de même la forme quadratique associée au ps φ par : $\Phi(x) = \varphi(x, x)$

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$|\langle X, Y \rangle| \leq \|X\| \cdot \|Y\|$$

Avec égalité ssi les vecteurs sont colinéaires.

Expression du produit scalaire.

- Base qcq : $\langle X, Y \rangle = \sum_{i,j} x_i y_j \langle e_i, e_j \rangle$
- B.O.N : $\langle X, Y \rangle = \sum_i x_i y_i = {}^tXY$

Matrice orthogonale : P telle que ${}^tPP = Id$

Les vecteurs d'une matrice orthogonale forment une BON pour le p.s. standard.

Orthogonal d'une partie F de E (ev euclidien).

$$F^\perp = \{X \in E \text{ tels que } \forall f \in F, \langle X, f \rangle = 0\}$$

Propriétés :

- F^\perp est un sev de E.
- Si F est un sev de E, F^\perp est un supplémentaire de F dans E.
- $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$

Projection orthogonale sur un sev. E euclidien et F sev de E, x dans E

- $p(x)$: projeté de x sur F parallèlement à F^\perp est l'unique vecteur de F tq le vecteur $x - p(x)$ soit orthogonal à F.
- $p(x)$ réalise le minimum de la distance de x à F i.e. : $\forall f \in F, \|x - p(x)\| \leq \|x - f\|$
- Si (e_1, \dots, e_p) BON de F, alors :

$$p(x) = \sum_{k=1}^p \langle x, e_k \rangle e_k$$

Symétrie orthogonale par rapport à un sev F de E euclidien.

$$s(x) = 2p(x) - x$$

Algorithme de Gram-Schmidt : Pour obtenir une BON à partir d'une base qcq.

Soit (e_1, \dots, e_n) base qcq de E euclidien.

- $w_1 = \frac{e_1}{\|e_1\|}$
- Pour k de 2 à n, on calcule
 - $y_k = e_k - \sum_{j=1}^{k-1} \langle e_k, w_j \rangle w_j$
 - Puis $w_k = \frac{y_k}{\|y_k\|}$

La base orthonormée est celle des (w_1, \dots, w_n)

Endomorphismes symétriques.

f symétrique ssi : $\forall (x, y) \in E^2, \langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle$

La matrice de f dans une BON est symétrique

Théorèmes

- Les SEP pour f symétrique sont orthogonaux entre eux.
- Soit f symétrique, alors pour tout sev F stable par f, F^\perp stable par f.

Théorème fondamentale.

Soit f symétrique, il existe une BON de E dans laquelle la matrice de f est diagonale.