Exemple et méthode de résolution d'une EDP.
(Equation aux Dérivées Partielles)

Exemple 1 : EDP d'ordre 1

En utilisant le changement de variable $u = x + y$ et $v = x - y$, trouver toutes les fonctions f de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ vérifiant pour tout point (x, y) du plan :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) : (E)$$

1. <u>On introduit la fonction de changement de variable notée Φ</u>.

   Ici on a : $\boxed{\Phi(x,y) = (x+y\,;x-y) = (u,v)}$

   La fonction Φ est une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$.

   On a alors : $\begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases}$ et donc $\begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$

2. <u>On procède au changement de variable.</u>

   Effectuer un changement de variable consiste à chercher une fonction $g : (u,v) \longmapsto g(u,v)$ de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$ telle que la fonction composée $f = go\Phi$ vérifie la condition donnée (E).

   <u>Utilisation des matrices jacobiennes</u>.

   $f = go\Phi$ et donc

$$\mathcal{J}_f(x,y) = \mathcal{J}_g\big(\Phi(x,y)\big) \times \mathcal{J}_\Phi(x,y)$$

   Soit puisque $\Phi(x,y) = (u,v)$

$$\mathcal{J}_f(x,y) = \mathcal{J}_g(u,v) \times \mathcal{J}_\Phi(x,y)$$

   On obtient l'égalité :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,;\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\,;\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

   Ce qui donne :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,;\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)\,;\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,;\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\,;\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)$$

Et donc par identification :

$$\boxed{\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v) \end{cases}}$$

3. <u>On remplace les dérivées partielles de f par celles de g dans l'expression de départ (E).</u>

(E) devient alors : $\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u,v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)$

et donc : $2\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$

La fonction g ne dépend donc pas de u, elle est de la forme $g(u,v) = h(u)$ où h est une fonction de classe C^1

Donc, les solutions de l'EDP sont les fonctions C^1 de la forme : $\boxed{\boldsymbol{f(x,y) = h(x+y)}}$ **puisque** $\boldsymbol{u = x+y}$ **.**

Exemple 2 : EDP ordre 2.

On cherche les fonctions C^2 de ℝ² vérifiant : $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) : (E')}$

Pour cela on utilise le changement de variables affine : $\boxed{\Phi(x,y) = \left(\frac{x+y}{2} ; \frac{x-y}{2}\right) = (u,v)}$

Effectuer un changement de variable consiste à chercher une fonction $g : (u,v) \longmapsto g(u,v)$ de classe C^2 sur ℝ² telle que la fonction composée $f = go\Phi$ vérifie la condition donnée (E').

$f = go\Phi$ et donc : $\mathcal{J}_f(x,y) = \mathcal{J}_g(\Phi(x,y)) \times \mathcal{J}_\Phi(x,y)$

On obtient l'égalité :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) ; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) ; \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \times \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x,y) \\ \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x,y) & \dfrac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x,y) \end{bmatrix}$$

soit

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) ; \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v) ; \frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right) \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

d'où

$$(S):\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)\ +\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)\\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial u}(u,v)\ -\dfrac{1}{2}\dfrac{\partial g}{\partial v}(u,v)\end{cases}$$

Il faut alors obtenir les dérivées partielles secondes de la fonction f (qui est C^2) en fonction de celles de g. Pour cela on va utiliser une petite astuce.

On interprète les égalités (S) de la façon suivante : $(S'):\begin{cases}\dfrac{\partial}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial u}+\dfrac{\partial}{\partial v}\right)\\ \dfrac{\partial}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial}{\partial u}-\dfrac{\partial}{\partial v}\right)\end{cases}$

Alors en combinant (S) et (S') :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)+\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial g}{\partial u}(u,v)-\frac{\partial g}{\partial v}(u,v)\right)$$

On développe en utilisant la linéarité de l'opérateur dérivée partielle et le fait que la fonction f étant de classe C^2, on peut appliquer le théorème de Schwarz :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\right)$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y)=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)-2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\right)$$

L'EDP (E') devient alors :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y)\quad=\quad\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y):(E')$$
$$\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)+2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\right)=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u,v)-2\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)+\frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u,v)\right)$$

soit

$$\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial^2 g}{\partial u\partial v}(u,v)=0\quad(E_g)}}$$

On sait que les fonctions g de classe C^2 vérifiant cette EDP (E_g) sont de la forme :

$$g(u,u)=H(v)+k(u)\quad avec\ H\ et\ k\ de\ classe\ C^2$$

Et donc les fonctions f de classe C^2 qui vérifient (E') sont de la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{f(x,y)=H\left(\frac{x-y}{2}\right)+k\left(\frac{x+y}{2}\right)}\quad avec\ H\ et\ k\ de\ classe\ C^2}$$