TD 1 — Calcul vectoriel, fonctions à plusieurs variables, dérivées partielles

Exercice 1 Soit $\vec{a} = (1,1,0)$, $\vec{b} = (-1,2,3)$, $\vec{c} = (3,0,1)$ des vecteurs de $\mathbb{R}^3$ (identifié aux vecteurs de l'espace euclidien usuel).
Calculer les expressions suivantes :

$$(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c} \quad , \quad (\vec{c}\cdot\vec{a})\vec{b} \quad , \quad (\vec{a}\wedge\vec{b})\cdot\vec{c} \quad , \quad (\vec{a}\wedge\vec{b})\wedge\vec{c} \quad , \quad \vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})$$

Exercice 2 Simplifier pour $\vec{a}$, $\vec{b}$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$, les expressions

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b}) \quad , \quad (\vec{a}+\vec{b})\wedge(\vec{a}+\vec{b})$$

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}-\vec{b}) \quad , \quad (\vec{a}+\vec{b})\wedge(\vec{a}+3\vec{b}) \quad , \quad \vec{a}\cdot(\vec{a}\wedge(\vec{a}+3\vec{b}))$$

Exercice 3 On suppose que $\vec{F}$, $\vec{G}$ sont deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$. Montrer que :
a) $(\vec{F}\cdot\vec{G})' = \vec{F}'\cdot\vec{G} + \vec{F}\cdot\vec{G}'$
b) $(\vec{F}\wedge\vec{G})' = \vec{F}'\wedge\vec{G} + \vec{F}\wedge\vec{G}'$

Exercice 4 On considère les applications

$$f : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (3x+y, \frac{x}{y}) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad g : \begin{cases} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (x,y) \mapsto (xy^2, x+2\sqrt{y}) \end{cases}$$

Déterminer les domaines de définitions de f et de g.
Exprimer les applications $f\circ g$, $g\circ f$, $f\circ f$. On déterminera leurs domaines de définition.

Exercice 5 $x(t)$ et $y(t)$ sont deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
a) Soit la fonction A définie sur $\mathbb{R}^2$ par $A(u,v) = u^2v^3$. On pose $a(t) = A(x(t),y(t))$. Exprimer la dérivée de $a(t)$ à l'aide de $x(t)$, $y(t)$, $x'(t)$, $y'(t)$.
b) Même question avec $A(u,v) = \sin(u+3v^2)$.
c) Même question avec $A(u,v) = e^u(uv+4)$

Exercice 6 Pour les fonctions définies par les expressions suivantes, préciser les domaines de définition et déterminer les dérivées partielles :

1. $f(x,y,z) = x^2 + y^3 - 3z^2$
2. $f(x,y,z,t) = \big(x^3y^2z^3t, \cos(xyzt)\big)$
3. $f(x,y,z) = x^2y^3(z+3)^4$
4. $f(x,y) = \ln(x^2+2y^2)$
5. $f(x,y,z,t) = \frac{1}{x+y+z+t}$
6. $f(x,y,z) = \left(e^{xy}\sin^2(x+y), \frac{x}{y}, 5\right)$
7. $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{x^2+y^2+z^2}$
8. $f(x_1,x_2,\cdots,x_{100}) = x_1x_2x_3\cdots x_{100}$
9. $f(u,v,w) = \dfrac{u+3v}{u^2-v}$