TD 4 - Intégration

Exercice 1 Les formes différentielles suivantes sont-elles fermées ? Sont-elles exactes ? Préciser une primitive le cas échéant.

1. $x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x$
2. $(x^2+3y)\,\mathrm{d}x - y^3\,\mathrm{d}y$
3. $\dfrac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$
4. $x^2\,\mathrm{d}x + xy\,\mathrm{d}y + z^2\,\mathrm{d}z$
5. $x^3\,\mathrm{d}x + y^3\,\mathrm{d}y + z^3\,\mathrm{d}z$
6. $e^x(y+x)\,\mathrm{d}x + (e^x + 3e^y)\,\mathrm{d}y$
7. $x(y-1)\,\mathrm{d}x + y(x+1)\,\mathrm{d}y$
8. $\dfrac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ où on restreint le domaine de définition à $x > 0$.
9. $\dfrac{(1-x^2+y^2)y}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}x + \dfrac{(1+x^2-y^2)x}{(1+x^2+y^2)^2}\,\mathrm{d}y$

Exercice 2 Soit la forme différentielle

$$\omega = (x^2+y^2-1)\,\mathrm{d}x - 2y\,\mathrm{d}y$$

a) Montrer que ω n'est pas exacte.
b) Déterminer une fonction φ (à une variable) telle que la forme différentielle $\omega_1 = \varphi(x)\omega$ soit fermée.
c) Montrer que ω_1 est alors exacte et déterminer une primitive.

Exercice 3 Les fonctions suivantes de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ peuvent elles être écrites $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \varphi$? Précisez φ le cas échéant.

1. $f(\vec{r}) = \vec{a}$ avec $\vec{a}$ constant.
2. $f(x,y,z) = (x^2, xy, z^2)$
3. $f(\vec{r}) = \vec{r} \wedge \vec{a}$
4. $f(\vec{r}) = \vec{r}$
5. $f(x,y,z) = (x^3, y^3, z^3)$
6. $f(x,y,z) = (e^x, 0, 0)$

Exercice 4 Calculer les intégrales curvilignes suivantes :

$$\int_\Gamma (xy^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y)$$

où Γ est le segment reliant $A(1,1)$ à $B(2,3)$.

$$\int_\Gamma (xy\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y)$$

où Γ est l'arc de cercle de $A(2,0)$ à $B(0,2)$ sur le cercle de centre O et de rayon 2.

$$\int_\Gamma (xy\,dx + x^2y\,dy)$$

où Γ est le carré de sommets $(0,0), (0,1), (1,1), (1,0)$ parcouru dans le sens inverse au sens trigonométrique.

$$\int_P (y^2\,\mathrm{d}x + x^2\,\mathrm{d}y)$$

où P est l'arc de la parabole $2y^2 = x+1$ qui joint $(1,1)$ à $(-1,0)$.

Exercice 5 Soit
$$S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 0 \leq x \leq 3, x \leq y \leq 2x\}$$
Calculer
$$\iint_S (x^2 + xy + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Exercice 6 Calculer
$$\iint_D (x+y)^{-3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \quad \text{où} \quad D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2,\ 1 \leq x \leq 3\ ,\ y \geq 2\ ,\ x+y \leq 5\}$$

Exercice 7 f et g sont deux fonctions continues $[0,1] \to \mathbb{R}$ et $D = [0,1]^2$.
a) Exprimer $\displaystyle\iint_D (f(x)g(y) - f(y)g(x))^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ en fonction des intégrales
$$a = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t \quad , \quad b = \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t \quad , \quad c = \int_0^1 g(t)^2\,\mathrm{d}t$$
b) En déduire que $a^2 \leq bc$.

Exercice 8 Avec $S = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2, 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x\}$, calculer
$$\iint_S \frac{y}{x^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

Exercice 9 Soient :
$$A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ ,\ x \geq 1\ ,\ x^2 + y^2 \leq 2\}$$
A_2 le triangle de sommets O, $A(1,1)$ et $B(1,-1)$
A_3 la réunion de A_1 et A_2.
a) Calculer $\displaystyle\iint_{A_2} (x^2 - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
b) Calculer $\displaystyle\iint_{A_3} (x^2 - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$
c) En déduire la valeur de $\displaystyle\iint_{A_1} (x^2 - y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$

Exercice 10 Déterminer le centre d'inertie d'un secteur circulaire de centre O, de rayon a, de d'angle α, homogène. Déterminer le moment d'inertie par rapport à l'axe de symétrie du secteur.

Exercice 11 Calculer $\displaystyle\iint_D (x+y)e^{-x}e^{-y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x, y \geq 0, x+y \leq 1\right\}$.
Calculer $\displaystyle\iint_D (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < x, x^2 + y^2 > y\right\}$.
Calculer $\displaystyle\iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D = \left\{(x,y) \in [0,1]^2 / x^2 + y^2 \geq 1\right\}$.
Calculer $\displaystyle\iint_D xy\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ où $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x, y > 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\right\}$ avec $a, b > 0$.