

## Courbes paramétrées

### Définition : Arc paramétré

On appelle arc paramétré (de classe  $C^k$ ) toute application  $f: I \subset \mathbb{R} \rightarrow \text{Plan}$  de classe  $C^k$

### I. Symétries

Soit  $g : t \mapsto f(g(t))$  de  $I$  dans  $I$  telle que  $I = I' \cup g(I')$  et  $I' \cap g(I') = \emptyset$  ou un singleton

Suivant la formule liant  $\gamma \circ g$  et  $\gamma$ , on fait varier  $t$  dans  $I'$ , d'où une courbe  $\Gamma'$ , puis une courbe  $\Gamma''$  déduite de  $\Gamma'$ , et  $\Gamma = \Gamma' \cup \Gamma''$

|                                                                      | Isométrie permettant de passer de $\Gamma'$ à $\Gamma''$ |
|----------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------|
| $\begin{cases} x(g(t)) = x(t) \\ y(g(t)) = y(t) \end{cases}$         | Identité                                                 |
| $\begin{cases} x(g(t)) = x(t) + a \\ y(g(t)) = y(t) + b \end{cases}$ | Translation de vecteur $a\vec{i} + b\vec{j}$             |
| $\begin{cases} x(g(t)) = -x(t) \\ y(g(t)) = y(t) \end{cases}$        | Symétrie par rapport à (Oy)                              |
| $\begin{cases} x(g(t)) = x(t) \\ y(g(t)) = -y(t) \end{cases}$        | Symétrie par rapport à (Ox)                              |
| $\begin{cases} x(g(t)) = -x(t) \\ y(g(t)) = -y(t) \end{cases}$       | Symétrie par rapport au point O                          |
| $\begin{cases} x(g(t)) = y(t) \\ y(g(t)) = x(t) \end{cases}$         | Symétrie par rapport à la première bissectrice           |

Généralement on teste :

- $g(t) = -t$  pour  $I = ]-a; a[$  et alors  $I' = [0; a[$
- $g(t) = a + b - t$  pour  $I = [a; b]$  et alors  $I' = [a; \frac{a+b}{2}[$
- $g(t) = \frac{1}{t}$  pour  $I = ]0; +\infty[$  et alors  $I' = ]0; 1]$

### II. Points réguliers, biréguliers.

#### Définition.

Soit  $\Gamma$  la trajectoire de l'arc paramétré  $\gamma: t \mapsto \gamma(t) = M(t)$  de classe  $C^1$

On dit que  $M(t)$  est un **point régulier** de  $\Gamma$  si et seulement si :  $\overrightarrow{\gamma'(t)} \neq \vec{0}$

Si  $\gamma$  est de classe  $C^2$

On dit que  $M(t)$  est un **point birégulier** de  $\Gamma$  si et seulement si : la famille  $(\overrightarrow{f'(t)}; \overrightarrow{f''(t)})$  est libre.

Pour les déterminer on écrit que le déterminant de la famille est non nul

Un point non régulier est dit **stationnaire**.

### III. Tangentes.

#### 1. Tangente en un point régulier.

$\gamma$  un arc paramétré de classe  $C^1$

En tout point régulier  $M(t)$  de  $\Gamma$ ,  $\Gamma$  admet une tangente et celle-ci est dirigé par  $\overrightarrow{\gamma}'(t)$ .

Soit  $M(t)$  point régulier de  $\Gamma$ , et  $T(t)$  la tangente en  $M(t)$  à  $\Gamma$ .

- Si  $x'(t) \neq 0$ ,  $T(t)$  a pour coeff. directeur :  $\frac{y'(t)}{x'(t)}$
- Si  $x'(t) = 0$ ,  $T(t)$  est parallèle à  $(Oy)$  (dans ce cas on a  $y'(t)$  non nul car  $M(t)$  régulier)

#### 2. Tangente, cas général.

##### Théorème.

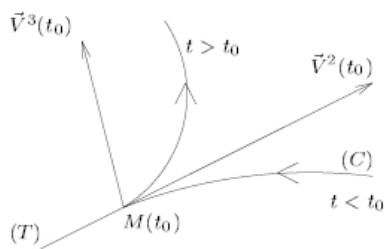
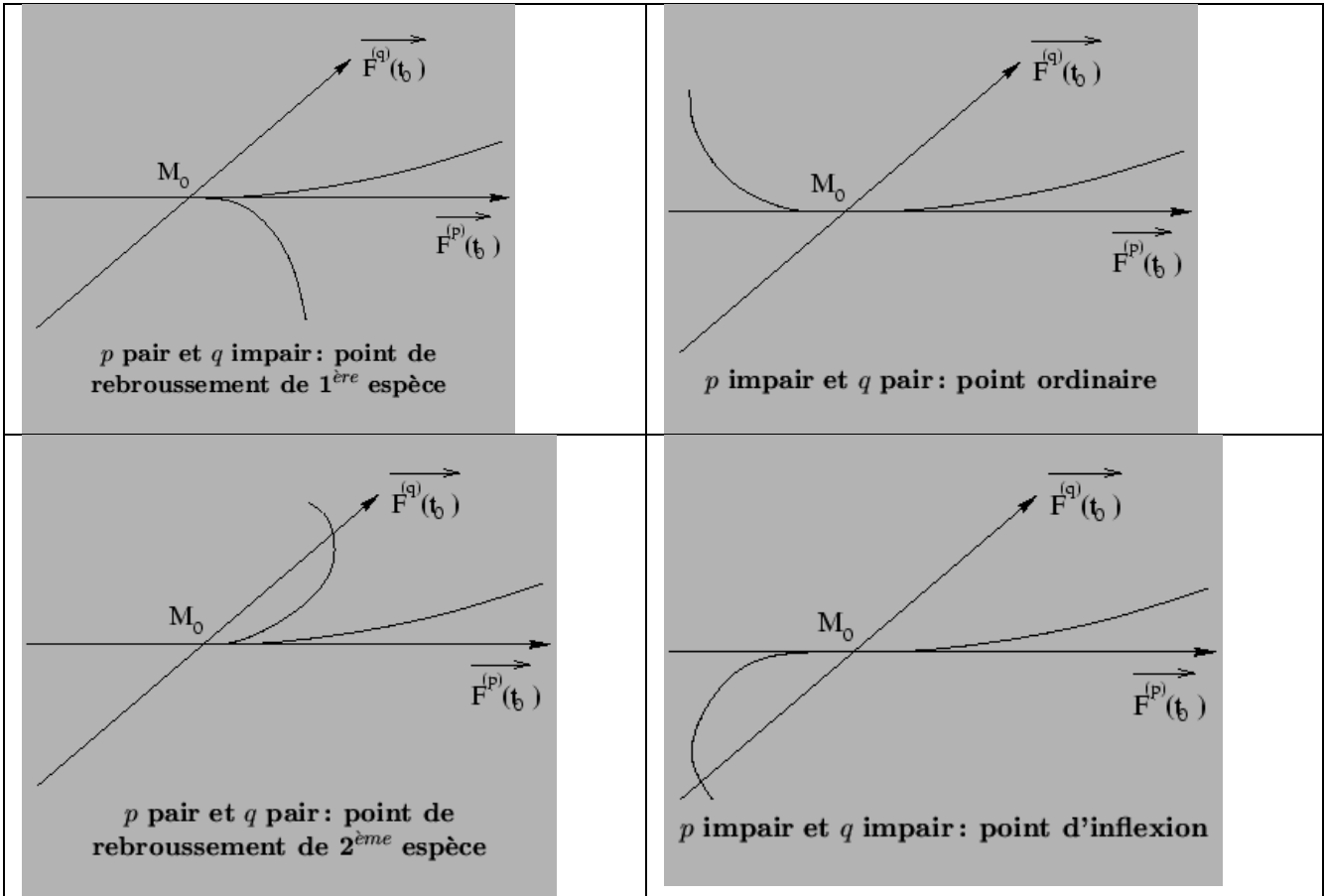
$\gamma$  un arc paramétré de classe  $C^k$ , et  $A(t) = \gamma(t)$

Si l'un au moins des vecteurs dérivés successifs  $\overrightarrow{f}'(t); \overrightarrow{f}''(t); \dots; \overrightarrow{f}^{(k)}(t)$  est non nul, alors  $\Gamma$  admet en  $A(t)$  une tangente et celle-ci est dirigée par le premier vecteur dérivé successif qui soit non nul.

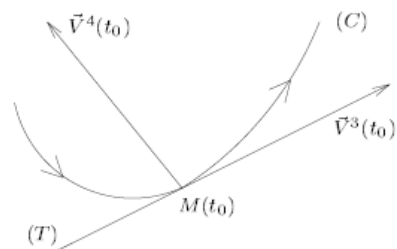
### 3. Allure de la courbe au voisinage d'un point.

Soit  $p$  le plus petit entier  $\geq 1$  tel que :  $\overrightarrow{f^{(p)}(t)} \neq \vec{0}$

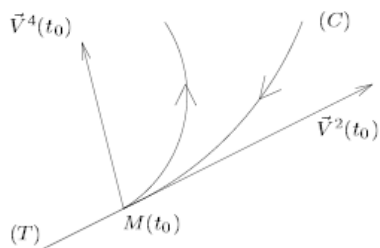
Soit  $q$  le plus petit entier  $> p$  tel que :  $(\overrightarrow{f^{(p)}(t)}; \overrightarrow{f^{(q)}(t)})$  soit libre



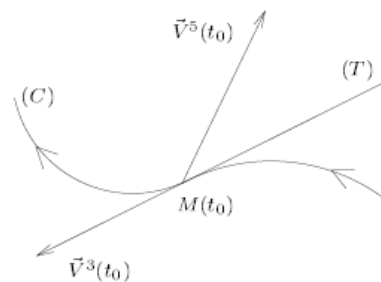
$p$  pair,  $q$  impair : rebroussement de 1<sup>e</sup> espèce



$p$  impair,  $q$  pair : méplat



$p$  pair,  $q$  pair : rebroussement de 2<sup>e</sup> espèce



$p$  impair,  $q$  impair : point d'inflexion

## IV. Branches infinies.

### Définition : Branche infinie.

On dit que  $\Gamma$  admet une **branche infinie** quand  $t$  tend vers  $a$  ( $\in \overline{\mathbb{R}}$ ) ssi  $\lim_{t \rightarrow a} \|\vec{f}(t)\| = +\infty$ .

### Condition suffisante.

Si  $\lim_a |x(t)| = +\infty$  ou  $\lim_a |y(t)| = +\infty$ , alors  $\Gamma$  admet une **branche infinie** quand  $t$  tend vers  $a$

### Asymptotes simples.

- Si  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow a} x(t) = \pm\infty \\ \lim_{t \rightarrow a} y(t) = b \in \mathbb{R} \end{cases}$ ,  
alors  $\Gamma$  admet **pour asymptote la droite d'équation  $y = b$** .
- Si  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow a} y(t) = \pm\infty \\ \lim_{t \rightarrow a} x(t) = c \in \mathbb{R} \end{cases}$ ,  
alors  $\Gamma$  admet **pour asymptote la droite d'équation  $x = c$** .

**Cas d'étude dans le cas où  $\lim_a |x(t)| = +\infty$  et  $\lim_a |y(t)| = +\infty$ ,**

On suppose que  $\Gamma$  admet une **branche infinie** quand  $t$  tend vers  $a$

- Si  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = \pm\infty$ , alors  $\Gamma$  admet une **branche parabolique de direction asymptotique (Oy)**.
- Si  $\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ , alors  $\Gamma$  admet une **branche parabolique de direction asymptotique (Ox)**.
- Si  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = b \in \mathbb{R}^* \\ \lim_{t \rightarrow a} y(t) - b x(t) = \pm\infty \end{cases}$ ,  
alors  $\Gamma$  admet une **branche parabolique de direction asymptotique la droite d'équation  $y = bx$** .
- Si  $\begin{cases} \lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t)}{x(t)} = b \in \mathbb{R}^* \\ \lim_{t \rightarrow a} y(t) - b x(t) = c \in \mathbb{R} \end{cases}$ ,  
alors  $\Gamma$  admet une **pour asymptote la droite d'équation  $y = bx + c$** .