

## Fiche de cours : CALCUL DIFFERENTIEL ET DERIVEE PARTIELLES.

Ceci n'est pas un cours mais un résumé des notions importantes. Pour alléger les écritures, on considérera toujours  $f$  une fonction définie sur  $U$ , un ouvert de  $\mathbb{R}^p$  et à valeurs dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $a$  est un vecteur de  $U$ ,  $U_0 = \{h \in U \text{ tq } (a+h) \in U\}$ .

$$f : U \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ telle que : } f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_p) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_p) \\ \dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{pmatrix}$$

### 1 – Dérivées partielles.

$f$  admet une dérivée partielle première ( $dp_1$ ) en  $a \in \mathbb{R}^p$  par rapport à  $x_j$ , si la limite suivante existe :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_j - h, \dots, a_p) - f(a_1, a_2, \dots, a_p)}{h}$$

Si elle existe, on note cette limite  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ .

- Si  $x \in \mathbb{R}^p$   $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$  alors  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left( \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a) \right)$

- **Remarque importante :**

Si  $f$  est une fonction de  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ , alors la dérivée partielle  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$  est aussi une fonction de  $\mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n$ .

Ainsi,  $\frac{\partial f}{\partial x_j}(M) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_p)$  correspond à la fonction dérivée partielle première de  $f$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ , par rapport à la  $j^{\text{ème}}$  variable  $x_j$ , au point  $M(x_1, x_2, \dots, x_p)$

- **Propriétés.**

- On dit que :  **$f$  est  $C^1(U)$ , si  $f$  admet des  $dp_1$  continues sur  $U$ .**
- **$DL_1(a)$  :** Si  $f$  est  $C^1(U)$  alors il existe une fonction  $\varepsilon$  avec  $\lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0$  et telle que :

$$\forall h \in U_0, \quad f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^p h_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \|h\| \varepsilon(h)$$

- **$Si f$  est  $C^1(U)$  alors  $f$  est continue sur  $U$ .**

### 2 – Dérivées secondes.

Soit  $f$  qui admet une  $dp_1 \frac{\partial f}{\partial x_i}$  sur  $U$ .

Si cette fonction  $\frac{\partial f}{\partial x_i}$  admet en  $a$  une  $dp_1$ ,  $\frac{\partial f}{\partial x_j} \left( \frac{\partial f}{\partial x_i} \right) (a)$ , on la note :  $f''_{x_j x_i}(a)$ , ou  $D^2_{ji}(a)$  ou :  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)$

- **Théorème de Schwarz** SCHWARZ Hermann Amandus (1843-1921), Allemagne

Si sur  $U$ , les  $dp_2$ ,  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$  et  $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$  existent et sont continues, alors elles sont égales.

- On dit que  **$f$  est  $C^2(U)$  si ses  $p^2$ , dérivées partielles secondes ( $dp_2$ ), existent et sont continues.**

- **$Si f$  est  $C^2(U) \Rightarrow f$  est  $C^1(U)$**  (et donc  $f$  est continue).

**3 – Différentielles.**

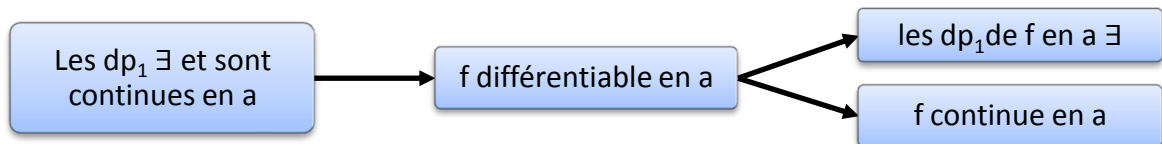
f est différentiable en a si  $\left\{ \begin{array}{l} \exists 1 \text{ appli. linéaire notée } d_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \\ \exists \text{ fonction } \varepsilon \text{ telle que } \lim_{h \rightarrow 0} \varepsilon(h) = 0 \end{array} \right\}$  telle que :

$$\forall h \in U_0, \quad f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\| \varepsilon(h)$$

• **Propriétés.**

- $d_a f$  est unique.
- Si f de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ ,  $d_a f(h) = f'(a) \cdot h$ .
- $f$  différentiable en a  $\Rightarrow f$  est continue en a (réciproque fausse).
- $f$  différentiable en a  $\Rightarrow f$  admet de  $dp_1$  en a (réciproque fausse).
- f différentiable en a  $\Rightarrow d_a f(h) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \cdot h_j = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f(a) \mid h \rangle$  et  $d_a f(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$
- $f$  est  $C^1(U) \Rightarrow f$  est différentiable en a de U (réciproque fausse).
- $f$  est  $C^1(U) \Leftrightarrow$  l'application  $a \rightarrow d_a f$  est continue.  
(Avant on nommait fonction continûment différentiable une fonction  $C^1$ )

**Bilan**



**4-Différentielles de fonctions  $C^1$ .**

- f est  $C^1(U) \Rightarrow$

$$d_a f(h) = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \cdot h_j = \langle \overrightarrow{\text{grad}} f(a) \mid h \rangle$$

- $f$  linéaire de  $\mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \Rightarrow f$  est  $C^1$  et  $d_a f = f$

- On note  $p_j$  la projection définie par  $p_j(h) = h_j$  (application linéaire), alors :  
 $d_a p_j = p_j = dx_j$  (notation car indépendant de a),

$$d_a f = \sum_{j=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \cdot dx_j$$

- **Jacobien.**

$$J_f(a) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a) \right)_{\substack{1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq p}}$$

$J_f(a) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$ , est la **Matrice jacobienne** de f en a. Le **jacobien** de f en a est le déterminant de cette matrice.

- **Composition d'applications  $C^1$ .**

$$\mathbb{R}^q \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n \quad \text{Si } f, g \in C^1, \text{ alors } g \circ f \text{ est } C^1, \text{ et}$$

$$d_a(g \circ f) = (d_{f(a)} g) \circ (d_a f)$$

$$J_{g \circ f}(a) = J_g(f(a)) \cdot J_f(a)$$

$$\frac{\partial (g \circ f)_i}{\partial x_j}(a) = \sum_{k=1}^p \frac{\partial g_i}{\partial x_k}(f(a)) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(a) \quad \text{pour } \begin{cases} 1 \leq i \leq n \\ 1 \leq j \leq q \end{cases}$$

### **6 – Compléments.**

- **Taylor Young ordre 2**  $U$  ouvert de  $\mathbb{R}^p$ , si  $f$  est  $C^2(U)$ ,

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^p \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot h_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) \cdot h_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a) \cdot h_i h_j + o(\|h\|^2)$$