Fiche de cours : CALCUL DIFFERENTIEL ET DERIVEE PARTIELLES.

Ceci n'est pas un cours mais un résumé des notions importantes. Pour alléger les écritures, on considérera toujours f une fonction définie sur U, un ouvert de $\mathbb{R}^p$ et à valeurs dans $\mathbb{R}^n$, a est un vecteur de U, $U_0 = \{h \in U \; tq \; (a+h) \in U\}$.

$$f : U \subset \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n \text{ telle que : } f(x_1, x_2, \dots, x_p) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_p) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_p) \\ \dots\dots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_p) \end{pmatrix}$$

1 – Dérivées partielles.

f admet une dérivée partielle première (*dp₁*) en *a* ∈ $\mathbb{R}^p$ par rapport à x_j, si la limite suivante existe :

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, a_2, \dots, a_j - h, \dots, a_p) - f(a_1, a_2, \dots, a_p)}{h}}$$

Si elle existe, on note cette limite $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}$.

- Si $x \in \mathbb{R}^p$ $f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x))$ alors $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \dots, \frac{\partial f_n}{\partial x_j}(a)\right)}$
- *Remarque importante* :
  Si f est une fonction de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$, alors la dérivée partielle $\frac{\partial f}{\partial x_j}$ est aussi une fonction de $\mathbb{R}^p \to \mathbb{R}^n$.
  Ainsi, $\frac{\partial f}{\partial x_j}(M) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, x_2, \dots, x_p)$ correspond à la fonction dérivée partielle première de f, $\frac{\partial f}{\partial x_j}$, par rapport à la $j^{ème}$ variable x_j, au point $M(x_1, x_2, \dots, x_p)$
- **Propriétés**.
  - On dit que **:** $\boxed{\boldsymbol{f \text{ est } C^1(U)}, si\ f\ admet\ des\ dp_1\ continues\ sur\ U}$.
  - **DL_1(a)** : Si f est $C^1(U)$ alors il existe une fonction ε avec $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$ et telle que :

$$\boxed{\forall\, h \in U_0, \qquad f(a+h) = f(a) + \sum_{j=1}^{p} h_j \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) + \|h\|\, \varepsilon(h)}$$

  - $\boxed{Si\ f\ est\ C^1(U)\ \ alors\ f\ est\ continue\ sur\ U}$.

2 – Dérivées secondes.

Soit f qui admet une dp_1 $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ sur U.

Si cette fonction $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admet en *a* une dp_1, $\frac{\partial f}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(a)$, on la note : $f''_{x_j x_i}(a)$, ou $D^2_{ji}(a)$ ou : $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(a)}$

- **Théorème de Schwarz** SCHWARZ Hermann Amandus (1843-1921), Allemagne

$$\boxed{\text{Si sur U, les } dp_2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_i} \text{ et } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i\, \partial x_j} \text{ existent et sont continues, alors elles sont égales.}}$$

- On dit que $\boxed{\boldsymbol{f \text{ est } C^2(U)}\ si\ ses\ p^2\ , dérivées\ partielles\ secondes\ (dp_2), existent\ et\ sont\ continues}$.

- $\boxed{Si\ f\ est\ C^2(U) \Rightarrow f\ est\ C^1(U)}$ (et donc f est continue).

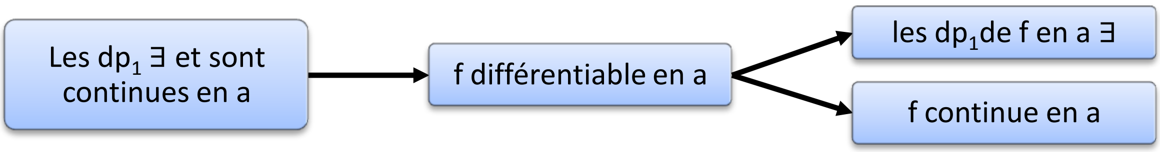
3 – Différentielles.

f est différentiable en a si $\left\{\begin{array}{c}\exists \text{ 1 appli. linéaire notée } d_a f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \\ \exists \text{ fonction } \varepsilon \text{ telle que } \lim\limits_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0\end{array}\right\}$ telle que :

$$\boxed{\forall h \in U_0, \qquad f(a+h) = f(a) + d_a f(h) + \|h\| \, \varepsilon(h)}$$

- **Propriétés**.
    - $d_a f$ est unique.
    - Si f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $d_a f(h) = f'(a).h$.
    - $\boxed{f \text{ différentiable en } a \Rightarrow f \text{ est continue en } a \text{ (réciproque fausse)}}$.
    - $\boxed{f \text{ différentiable en } a \Rightarrow f \text{ admet de } dp_1 \text{ en } a \text{ (réciproque fausse)}}$.
    - f différentiable en a $\Rightarrow$ $\boxed{d_a f(h) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \, . \, h_j = \langle \overrightarrow{grad} \, f(a) \mid h \rangle}$ et $\boxed{d_a f(e_i) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)}$
    - $\boxed{f \text{ est } C^1(U) \Rightarrow f \text{ est différentiable en } a \text{ de } U \text{ (réciproque fausse)}}$.
    - f est $C^1(U) \Leftrightarrow$ l'application $a \to d_a f$ est continue.
      (Avant on nommait *fonction continûment différentiable* une fonction C^1)

Bilan



4-Différentielles de fonctions C¹.

- **f est $C^1(U) \Rightarrow$**

$$\boxed{d_a f(h) = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \, . \, h_j = \langle \overrightarrow{grad} \, f(a) \mid h \rangle}$$

- $\boxed{\boldsymbol{f \text{ linéaire}} \text{ de } \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n) \Rightarrow f \text{ est } C^1 \text{ et } d_a f = f}$

- On note p_j la projection définie par : $p_j(h) = h_j$ (application linéaire), alors :
  $d_a p_j = p_j = dx_j$ (notation car indépendant de a),

$$\boxed{d_a f = \sum_{j=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a) \, . \, dx_j}$$

- **Jacobien**.

$$\boxed{\mathcal{J}_f(a) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right)_{\substack{1 \le i \le n \\ 1 \le j \le p}}}$$

$\mathcal{J}_f(a) \in M_{n,p}(\mathbb{R})$, est la **Matrice jacobienne** de f en a. **Le jacobien** de f en *a* est le déterminant de cette matrice.

- <u>**Composition d'applications C^1.**</u>

$$\mathbb{R}^q \xrightarrow{f} \mathbb{R}^p \xrightarrow{g} \mathbb{R}^n$$ Si f, g C^1, alors gof est C^1, et

$$\boxed{d_a\,(gof) = \left(d_{f(a)}\,g\,\right)o(d_a\,f)}$$

$$\boxed{\mathcal{J}_{gof}\,(a) = \mathcal{J}_g\big(f(a)\big).\mathcal{J}_f(a)}$$

$$\boxed{\frac{\partial (gof)_i}{\partial x_{\mathrm{j}}}\,(a) = \sum_{k=1}^{p} \frac{\partial g_i}{\partial x_{\mathrm{k}}}(f(a))\,.\frac{\partial f_k}{\partial x_{\mathrm{j}}}(a) \quad \text{pour} \quad \begin{cases} 1 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{n} \\ 1 \leq \mathrm{j} \leq \mathrm{q} \end{cases}}$$

<u>6 – Compléments.</u>

- <u>Taylor Young ordre 2</u> U ouvert de $\mathbb{R}^p$, si f est $C^2(U)$,

$$\boxed{f(a+h) - f(a) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}\,(a)\,.\,h_i + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\mathrm{i}}^2}\,(a)\,.\,h_i^2 + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \frac{\partial^2 f}{\partial x_{\mathrm{i}}\;\partial x_{\mathrm{j}}}\,(a)\,.\,h_i\,h_j + o\,(\|h\|^2)}$$