FORMES DIFFERENTIELLES.

1 - Définitions.

U ouvert de $\mathbb{R}^2$ (ou de $\mathbb{R}^3$)

- **1a. Forme différentielle sur U.**
  - Sur $\mathbb{R}^2$.
    ω application de U → $\mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ telle qu'il existe P, Q, de classe C^1 de U → $\mathbb{R}$
    $\omega(x,y) = Pdx + Qdy$
  - Sur $\mathbb{R}^3$.
    ω application de U → $\mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ telle qu'il existe P, Q, R, de classe C^1 de U → $\mathbb{R}$
    $\omega(x,y) = Pdx + Qdy + Rdz$

- **1b. Forme différentielle exacte** (ou *admettant des primitives* ou *totale*).
  ω exacte sur U
  ssi il existe F : U → $\mathbb{R}$ de classe C^1 telle que : $d_a F = \omega(a)$ (pour a de U)
  Sur $\mathbb{R}^2$: Cela correspond à : $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = P(x,y)$ et $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = Q(x,y)$

- **1c. Potentiel scalaire**. $\vec{F}$: U ⊂ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ champ de vecteur de classe C^1

  $\vec{F}$ dérive d'un potentiel scalaire (ou admet)
  si il existe un champ scalaire f de U⊂ $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, de classe C^1, tel que $\boxed{\vec{F} = \overrightarrow{grad}\, f}$.

  A toute forme différentielle :

$$\omega = \sum_{j=1}^{p} A_j\,(X) dx_j$$

  On peut associer le champ de vecteurs

$$\vec{V} = \sum_{j=1}^{p} A_j\, \vec{e_j}$$

  Alors

$$\boxed{\boldsymbol{\omega \text{ exacte avec } \omega = df \iff \vec{V} \text{ dérive d'un potentiel et } \vec{V} = \overrightarrow{grad}\, f}}$$

- **Forme différentielle fermée**.

  - Sur $\mathbb{R}^2$. : ω fermée si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$
  - Sur $\mathbb{R}^3$. : ω fermée si $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ et $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$ et $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$
  - Sur $\mathbb{R}^p$. : ω fermée si $\frac{\partial A_i}{\partial x_j} = \frac{\partial A_j}{\partial x_i}$ pour $\omega(X) = \sum_{j=1}^{p} A_j\,(X) dx_j$

- **Partie étoilée**.

  Soit X ∈ parties de $\mathbb{R}^3$ (ou de $\mathbb{R}^2$) et A ∈ X. $[AM] = \{ P\,;\ \exists a \in [0,1]\ tq\ \overrightarrow{AP} = a\,\overrightarrow{AM} \}$

  \- X étoilé par rapport à A si : $\forall M \in X,\ [AM] \subset X$

  \- X étoilé si : ∃ A∈X tq X étoilé par rapport à A.

  Remarque : toute partie convexe est étoilée par rapport à chacun de ses points

2 – Théorèmes. U ouvert de $\mathbb{R}^p$

- **2a. Proposition**.

$$\boxed{Si\ U\ connexe\ et\ \omega\ exacte\ \Longrightarrow\ \omega\ admet\ au\ moins\ une\ primitive\ F\ et\ \{F + a, a \in \mathbb{R}\}}$$

- **2b. Théorème.**

$$\boxed{\omega\ exacte\ sur\ U\ \Longrightarrow\ \omega\ fermée\ sur\ U}$$

Remarque : $\frac{\partial F}{\partial x_j} = A_j$ *car ω exacte ; or les A_j sont C^1, donc F est C^2 (on peut appliquer th. Schwarz)*

- **2c. Théorème de Poincaré**.

$$\boxed{Si\ U\ étoilé\ et\ \omega\ fermée\ sur\ U\ \Longrightarrow\ \omega\ exacte\ sur\ U}.$$

Remarque :

Une partie A est convexe ssi [XY] ⊂A pour tout X et Y , donc $\boxed{convexe\ \Rightarrow\ étoilé}$

- **2d. Théorème**.

$$\boxed{\begin{array}{l} 1°)\ Si\ \vec{F}\ dérive\ d'un\ potentiel\ scalaire\ alors\ \overrightarrow{rot}\,(\vec{F}) = \vec{0} \\ \\ 2°)\ Si\ \overrightarrow{rot}\,(\vec{F}) = \vec{0}\ et\ si\ U\ est\ étoilé,\ alors\ \vec{F}\ dérive\ d'un\ potentiel\ scalaire \end{array}}$$

$\Longrightarrow$ *se démontre avec le théorème de Poincaré*