D.M. de Mathématiques : Séries numériques et séries entières.

à rendre au plus tard le mercredi 14 mai 2008

Exercice 1.

On rappelle le **critère d'Abel** :

> On considère une série de la forme : $\sum a_n b_n$ avec
>
> - (a_n) une suite complexe telle que :
> $$\exists\, M > 0\ ;\ \forall n \geq 0, \left|\sum_{k=0}^{n} a_k\right| \leq M$$
> - (b_n) une suite complexe telle que :
>   1. (b_n) converge vers 0.
>   2. (b_n) décroissante.
>
> Alors la série $\sum a_n b_n$ converge.

1. Montrer que si $\theta \neq 0[2\pi]$,

$$\left|\sum_{k=0}^{n} e^{ik\theta}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|}$$

2. Montrer la convergence de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n^{\alpha}}\ , avec\ \alpha > 0\ et\ \theta\ réel.$$

Exercice 2.

On considère la série :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}$$

1. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.

2. Montrer que :

$$\sum_{n=0}^{N} u_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^3} + \int_0^1 \frac{(-t)^{3N}}{1+t^3}\,dt$$

3. Montrer que :

$$\left|\int_0^1 \frac{(-t)^{3N}}{1+t^3}\,dt\right| \leq \frac{1}{3N+1}$$

4. En déduire que :

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}\left(ln\,2 + \frac{\pi}{\sqrt{3}}\right)}$$

<u>Exercice 3.</u>

On cherche à trouver une solution particulière sur $\mathbb{R}_+^*$ de l'équation différentielle :

$$(E)\quad : \quad xy'' + 2y' + xy = 0$$

1. Supposons qu'il existe une solution particulière de (E) développable en série entière en 0 de la forme : $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\, x^n$.

   Montrer alors que :

$$\forall p \in \mathbb{N}\,, a_{2p+1} = 0 \;et\; a_{2p} = \frac{(-1)^p}{(2p+1)!}\, a_0$$

2. Exprimer la série obtenue à l'aide du symbole $\sum$ et calculer son rayon de convergence.

3. Exprimer cette série à l'aide des fonctions usuelles.