17. Démontrer le théorème 19, page 142, i.e. si $\{u_n(z)\}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$, est un ensemble de fonctions continues dans $\mathcal{R}$, si $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)$ est uniformément convergente dans $\mathcal{R}$ et si C est une courbe de $\mathcal{R}$, alors

$$\int_C S(z)\,dz = \int_C \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(z)\right) dz = \sum_{n=1}^{\infty} \int_C u_n(z)\,dz$$

Comme dans le problème 16, nous avons $S(z) = S_n(z) + R_n(z)$ et ces fonctions étant continues dans $\mathcal{R}$ [d'après le problème 16] leurs intégrales existent, i.e.

$$\begin{aligned}\int_C S(z)\,dz &= \int_C S_n(z)\,dz + \int_C R_n(z)\,dz \\ &= \int_C u_1(z)\,dz + \int_C u_2(z)\,dz + \cdots + \int_C u_n(z)\,dz + \int_C R_n(z)\,dz\end{aligned}$$

Par hypothèse la série est uniformément convergente si bien que pour tout $\epsilon > 0$ nous pouvons trouver un nombre N indépendant de z dans $\mathcal{R}$ tel que $|R_n(z)| < \epsilon$ pour $n > N$. Si l'on désigne par L la longueur de C nous avons [d'après la propriété 5, page 93]

$$\left|\int_C R_n(z)\,dz\right| < \epsilon L$$

D'où $\left|\int_C S(z)\,dz - \int_C S_n(z)\,dz\right|$ peut être rendu aussi petit qu'on le désire en choisissant n suffisamment grand, ce qui démontre le résultat.

THEOREMES SUR LES SERIES ENTIERES

18. Si une série entière $\Sigma a_n z^n$ converge pour $z = z_0 \neq 0$, montrer qu'elle converge (*a*) absolument pour $|z| < |z_0|$, (*b*) uniformément pour $|z| \leqslant |z_1|$ où $|z_1| < |z_0|$.

(*a*) La série $\Sigma a_n z_0^n$ étant convergente, $\lim_{n\to\infty} a_n z_0^n = 0$ et l'on a $|a_n z_0^n| < 1$ pour n suffisamment grand, i.e. $|a_n| < \dfrac{1}{|z_0|^n}$ pour $n > N$. Alors

$$\sum_{N+1}^{\infty} |a_n z^n| = \sum_{N+1}^{\infty} |a_n|\,|z|^n \leqq \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|z|^n}{|z_0|^n} \tag{1}$$

Mais la dernière série de (*1*) converge pour $|z| < |z_0|$ et donc d'après le critère de comparaison la première série converge également, i.e. la série donnée est absolument convergente.

(*b*) Soit $M_n = \dfrac{|z_1|^n}{|z_0|^n}$. La série ΣM_n converge car $|z_1| < |z_0|$. Comme dans (*a*), $|a_n z_n| < M_n$ pour $z \leqslant z_1$ et donc d'après le critère de Weierstrass, $\Sigma a_n z^n$ est uniformément convergente.

On en déduit qu'une série entière est uniformément convergente dans tout compact situé dans l'intérieur du cercle de convergence

19. Démontrer que la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et sa série dérivée $\sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ ont même rayon de convergence.

Désignons par $R > 0$ le rayon de convergence de $\Sigma a_n z^n$. Soit $0 < |z_0| < R$, d'après le problème 18 nous pouvons choisir N tel que $|a_n| < \dfrac{1}{|z_0|^n}$ pour $n > N$.

Les termes de la série $\Sigma\, |n a_n z^{n-1}| = \Sigma n\, |a_n|\, |z|^{n-1}$ peuvent donc pour $n > N$ être rendus inférieurs aux termes correspondants de la série $\Sigma n \dfrac{|z|^{n-1}}{|z_0|^n}$ qui converge d'après le critère de comparaison pour $|z| < |z_0| < R$.

La série $\Sigma n a_n z^{n-1}$ converge donc absolument pour tous les points tels que $|z| < |z_0|$ (aussi près que $|z_0|$ soit de R), i.e. pour $|z| < R$.

Si toutefois $|z| > R$, $\lim_{n\to\infty} a_n z^n \neq 0$ et donc $\lim_{n\to\infty} n a_n z^{n-1} \neq 0$, dans ces conditions $\Sigma n a_n z^{n-1}$ ne converge pas.

R est donc le rayon de convergence de $\Sigma n a_n z^{n-1}$. Ceci est également vrai si $R = 0$.

On notera que la série des dérivées peut converger ou non pour des valeurs de z telles que $|z| = R$.

20. Démontrer que dans tout compact situé entièrement à l'intérieur du cercle de convergence, une série entière (*a*) représente une fonction continue notée $f(z)$, (*b*) peut être intégrée terme à terme pour obtenir l'intégrale de $f(z)$, (*c*) peut être dérivée terme à terme pour obtenir la dérivée de $f(z)$.

Nous considérerons la série entière $\Sigma a_n z^n$ bien que des résultats analogues soient également vrais pour $\Sigma a_n (z-a)^n$.

(*a*) C'est une conséquence du problème 16 et du fait que chaque terme $a_n z^n$ est continu.

(*b*) C'est une conséquence du problème 17 et du fait que chacun des termes $a_n z^n$ de la série est continu et donc intégrable.

(*c*) D'après le problème 19 la dérivée d'une série entière converge dans le même cercle de convergence que la série initiale et donc est uniformément convergente dans tout compact entièrement situé à l'intérieur du cercle de convergence. On déduit alors le résultat cherché du théorème 20, page 142.

21. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n^2}$ a une valeur finie en tout point intérieur à son cercle de convergence ou sur celui-ci, mais que ce n'est pas vrai pour la série dérivée.

D'après le critère de d'Alembert la série converge pour $|z| < 1$ et diverge pour $|z| > 1$. Si $|z| = 1$ alors $|z^n/n^2| = 1/n^2$ et la série est convergente (absolument). La série converge donc pour $|z| \leqslant 1$ et a donc une valeur finie à l'intérieur du cercle de convergence et sur celui-ci.

La série des dérivées est $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{n}$ D'après le critère de d'Alembert la série converge pour $|z| < 1$. Toutefois la série ne converge pas pour tout z tel que $|z| = 1$, par exemple si $z = 1$ la série diverge.

THEOREME DE TAYLOR

22. Démontrer le théorème de Taylor : si $f(z)$ est analytique à l'intérieur du cercle C centré en a, alors pour tout z intérieur à C,

$$f(z) \quad = \quad f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \frac{f'''(a)}{3!}(z-a)^3 + \cdots$$

Soit z un point quelconque intérieur à C. Construisons un cercle C_1 centré en a et entourant z (voir figure 6.4). Alors d'après la formule intégrale de Cauchy,

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-z}\,dw \tag{1}$$

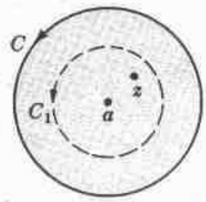

Fig. 6-4

Nous avons

$$\frac{1}{w-z} \quad = \quad \frac{1}{(w-a)-(z-a)} \quad = \quad \frac{1}{(w-a)}\left\{\frac{1}{1-(z-a)/(w-a)}\right\}$$

$$= \quad \frac{1}{(w-a)}\left\{1 + \left(\frac{z-a}{w-a}\right) + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n-1} + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{1}{1-(z-a)/(w-a)}\right\}$$

ou
$$\frac{1}{w-z} \quad = \quad \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \frac{(z-a)^2}{(w-a)^3} + \cdots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n} + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{1}{w-z} \tag{2}$$

En multipliant les deux membres de (*2*) par $f(w)$ et en utilisant (*1*) on obtient

$$f(z) \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{w-a}\,dw + \frac{z-a}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^2}\,dw + \cdots + \frac{(z-a)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^n}\,dw + U_n \tag{3}$$

où
$$U_n \quad = \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

D'après les formules intégrales de Cauchy

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw \qquad n = 0,1,2,3,\ldots$$

(3) devient

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}(z-a)^{n-1} + U_n$$

Si nous pouvons montrer que $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ nous aurons démontré le théorème considéré. Pour cela remarquons que w étant sur C_1,

$$\left|\frac{z-a}{w-a}\right| = \gamma < 1$$

où γ est une constante. Nous avons également $|f(w)| < M$ où M est une constante, et

$$|w-z| = |(w-a)-(z-a)| \geqq r_1 - |z-a|$$

r_1 étant le rayon de C_1. Alors d'après la propriété 5, page 93, nous avons

$$|U_n| = \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_1}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{f(w)}{w-z}\,dw\right|$$

$$\leqq \frac{1}{2\pi}\frac{\gamma^n M}{r_1 - |z-a|}\cdot 2\pi r_1 = \frac{\gamma^n M r_1}{r_1 - |z-a|}$$

et nous voyons que $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ ce qui complète la démonstration.

23. Soit $f(z) = \mathrm{Log}(1+z)$, où l'on considère la branche qui prend la valeur zéro pour $z = 0$. (*a*) Développer $f(z)$ en série de Taylor au voisinage de $z = 0$. (*b*) Déterminer le domaine de convergence de la série de (*a*). (*c*) Développer $\mathrm{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right)$ en série de Taylor au voisinage de $z = 0$.

(*a*)

$$\begin{aligned}
f(z) &= \mathrm{Log}(1+z) & f(0) &= 0\\
f'(z) &= \frac{1}{1+z} = (1+z)^{-1} & f'(0) &= 1\\
f''(z) &= -(1+z)^{-2} & f''(0) &= -1\\
f'''(z) &= (-1)(-2)(1+z)^{-3} & f'''(0) &= 2!\\
&\vdots & &\vdots\\
f^{(n+1)}(z) &= (-1)^n n!\,(1+z)^{-(n+1)} & f^{(n+1)}(0) &= (-1)^n n!
\end{aligned}$$

Alors

$$f(z) = \mathrm{Log}(1+z) = f(0) + f'(0)z + \frac{f''(0)}{2!}z^2 + \frac{f'''(0)}{3!}z^3 + \cdots$$

$$= z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

Autre méthode. Si $|z| < 1$,

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \cdots$$

On obtient alors par intégration entre 0 et z

$$\mathrm{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

(*b*) Le n-ième terme est $u_n = \frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}$. D'après le critère de d'Alembert

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{nz}{n+1}\right| = |z|$$

et la série converge pour $|z| < 1$. On peut montrer que la série converge pour $|z| = 1$ sauf pour $z = -1$.

Ce résultat est aussi une conséquence du fait que la série converge dans un cercle qui s'étend jusqu'à la singularité la plus proche (i.e. $z = -1$) de $f(z)$.

(c) D'après le résultat de (a) nous avons en remplaçant z par $-z$,

$$\operatorname{Log}(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \cdots$$

$$\operatorname{Log}(1-z) = -z - \frac{z^2}{2} - \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} - \cdots$$

les deux séries ci-dessus convergent pour $|z| < 1$. Par soustraction, nous avons

$$\operatorname{Log}\left(\frac{1+z}{1-z}\right) = 2\left(z + \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} + \cdots\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2z^{2n+1}}{2n+1}$$

qui converge pour $|z| < 1$. On peut aussi montrer que la série converge pour $|z| = 1$ sauf pour $z = \pm 1$.

24. (a) Développer $f(z) = \sin z$ en série de Taylor au voisinage de $z = \pi/4$ et (b) Déterminer le domaine de convergence de cette série.

(a) $f(z) = \sin z,\ f'(z) = \cos z,\ f''(z) = -\sin z,\ f'''(z) = -\cos z,\ f^{\text{IV}}(z) = \sin z,\ \ldots$

$f(\pi/4) = \sqrt{2}/2,\ f'(\pi/4) = \sqrt{2}/2,\ f''(\pi/4) = -\sqrt{2}/2,\ f'''(\pi/4) = -\sqrt{2}/2,\ f^{\text{IV}}(\pi/4) = \sqrt{2}/2,\ \ldots$

D'où, avec $a = \pi/4$,

$$\begin{aligned} f(z) &= f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)(z-a)^2}{2!} + \frac{f'''(a)(z-a)^3}{3!} + \cdots \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}(z-\pi/4) - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 2!}(z-\pi/4)^2 - \frac{\sqrt{2}}{2\cdot 3!}(z-\pi/4)^3 + \cdots \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + (z-\pi/4) - \frac{(z-\pi/4)^2}{2!} - \frac{(z-\pi/4)^3}{3!} + \cdots\right\} \end{aligned}$$

Autre méthode.

Soit $u = z - \pi/4$ ou $z = u + \pi/4$. Nous avons alors,

$$\begin{aligned} \sin z &= \sin(u + \pi/4) = \sin u \cos(\pi/4) + \cos u \sin(\pi/4) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}(\sin u + \cos u) \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{\left(u - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^5}{5!} - \cdots\right) + \left(1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \cdots\right)\right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + u - \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \frac{u^4}{4!} + \cdots\right\} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2}\left\{1 + (z-\pi/4) - \frac{(z-\pi/4)^2}{2!} - \frac{(z-\pi/4)^3}{3!} + \cdots\right\} \end{aligned}$$

(b) La singularité de $\sin z$ la plus proche de $\pi/4$ est à l'infini, la série converge donc pour toutes les valeurs finies de z, i.e. $|z| < \infty$. Ceci peut aussi être établi par la critère de d'Alembert.

THEOREME DE LAURENT

25. Démontrer le théorème de Laurent. Si $f(z)$ est analytique à l'intérieur de la couronne circulaire $\mathcal{R}$ limitée par les cercles concentriques C_1 et C_2 (centrés en a, de rayons respectifs r_1 et r_2, $r_2 > r_1$) si de plus $f(z)$ est analytique sur C_1 et C_2, alors pour tout z dans $\mathcal{R}$,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

où

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1} \frac{f(w)}{(w-a)^{n+1}}\,dw \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} \frac{f(w)}{(w-a)^{-n+1}}\,dw \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

D'après la formule intégrale de Cauchy [voir problème 23, page 131] nous avons

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw - \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw \qquad (1)$$

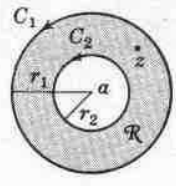

Fig. 6-5

Considérons la première intégrale de (*1*). Comme dans l'équation (*2*) du problème 22, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(w-a)\{1-(z-a)/(w-a)\}}\\ &= \frac{1}{w-a} + \frac{z-a}{(w-a)^2} + \cdots + \frac{(z-a)^{n-1}}{(w-a)^n} + \left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{1}{w-z} \qquad (2)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Si bien que } \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-a}\,dw + \frac{z-a}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^2}\,dw\\ &\quad + \cdots + \frac{(z-a)^{n-1}}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^n}\,dw + U_n\\ &= a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1} + U_n \qquad (3)\end{aligned}$$

où

$$a_0 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{w-a}\,dw, \quad a_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^2}\,dw, \quad \ldots, \quad a_{n-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\frac{f(w)}{(w-a)^n}\,dw$$

et

$$U_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_1}\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^n \frac{f(w)}{w-z}\,dw$$

Considérons maintenant la deuxième intégrale de (*1*). Nous avons en échangeant w et z dans (*2*),

$$\begin{aligned}-\frac{1}{w-z} &= \frac{1}{(z-a)\{1-(w-a)/(z-a)\}}\\ &= \frac{1}{z-a} + \frac{w-a}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n} + \left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n \frac{1}{z-w}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Si bien que} -\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{w-z}\,dw &= \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{f(w)}{z-a}\,dw + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{w-a}{(z-a)^2}f(w)\,dw\\ &\quad + \cdots + \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\frac{(w-a)^{n-1}}{(z-a)^n}f(w)\,dw + V_n\\ &= \frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + V_n \qquad (4)\end{aligned}$$

où

$$a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2} f(w)\,dw, \quad a_{-2} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}(w-a)f(w)\,dw, \quad \ldots, \quad a_{-n} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}(w-a)^{n-1}f(w)\,dw$$

et

$$V_n = \frac{1}{2\pi i}\oint_{C_2}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n \frac{f(w)}{z-w}\,dw$$

De (*1*), (*3*) et (*4*) nous tirons

$$\begin{aligned}f(z) &= \{a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_{n-1}(z-a)^{n-1}\}\\ &\quad + \left\{\frac{a_{-1}}{z-a} + \frac{a_{-2}}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{a_{-n}}{(z-a)^n}\right\} + U_n + V_n \qquad (5)\end{aligned}$$

On obtiendra le résultat demandé en montrant que (*a*) $\lim_{n\to\infty} U_n = 0$ et (*b*) $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$. La démonstration de (*a*) se réduit du problème 22. Pour démontrer (*b*) nous devons d'abord noter que w étant sur C_2,

$$\left|\frac{w-a}{z-a}\right| = \kappa < 1$$

où κ est une constante. De même nous avons $|f(w)| < M$ où M est une constante et

$$|z-w| = |(z-a)-(w-a)| \geqq |z-a| - r_2$$

Alors d'après la propriété 5, page 83, nous avons

$$\begin{aligned} |V_n| &= \frac{1}{2\pi}\left|\oint_{C_2}\left(\frac{w-a}{z-a}\right)^n \frac{f(w)}{z-w}\,dw\right| \\ &\leq \frac{1}{2\pi}\frac{\kappa^n M}{|z-a|-r_2}2\pi r_2 = \frac{\kappa^n M\,r_2}{|z-a|-r_2} \end{aligned}$$

Alors $\lim_{n\to\infty} V_n = 0$, ce qui complète la démonstration.

26. Déterminer le développement en série de Laurent des fonctions suivantes au voisinage des singularités indiquées.

(a) $\dfrac{e^{2z}}{(z-1)^3}$; $z = 1$. Soit $z-1 = u$. Alors $z = 1+u$ et

$$\begin{aligned} \frac{e^{2z}}{(z-1)^3} &= \frac{e^{2+2u}}{u^3} = \frac{e^2}{u^3}\cdot e^{2u} = \frac{e^2}{u^3}\left\{1 + 2u + \frac{(2u)^2}{2!} + \frac{(2u)^3}{3!} + \frac{(2u)^4}{4!} + \cdots\right\} \\ &= \frac{e^2}{(z-1)^3} + \frac{2e^2}{(z-1)^2} + \frac{2e^2}{z-1} + \frac{4e^2}{3} + \frac{2e^2}{3}(z-1) + \cdots \end{aligned}$$

$z = 1$ est un pôle d'ordre trois, ou pôle triple.

La série converge pour toute valeur de $z \neq 1$.

(b) $(z-3)\sin\dfrac{1}{z+2}$; $z = -2$. On pose $z+2 = u$ ou $z = u-2$. D'où

$$\begin{aligned} (z-3)\sin\frac{1}{z+2} &= (u-5)\sin\frac{1}{u} = (u-5)\left\{\frac{1}{u} - \frac{1}{3!\,u^3} + \frac{1}{5!\,u^5} - \cdots\right\} \\ &= 1 - \frac{5}{u} - \frac{1}{3!\,u^2} + \frac{5}{3!\,u^3} + \frac{1}{5!\,u^4} - \cdots \\ &= 1 - \frac{5}{z+2} - \frac{1}{6(z+2)^2} + \frac{5}{6(z+2)^3} + \frac{1}{120(z+2)^4} - \cdots \end{aligned}$$

$z = -2$ est une singularité essentielle (point singulier essentiel)

(c) $\dfrac{z-\sin z}{z^3}$; $z = 0$.

$$\begin{aligned} \frac{z-\sin z}{z^3} &= \frac{1}{z^3}\left\{z - \left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \frac{z^7}{7!} + \cdots\right)\right\} \\ &= \frac{1}{z^3}\left\{\frac{z^3}{3!} - \frac{z^5}{5!} + \frac{z^7}{7!} - \cdots\right\} = \frac{1}{3!} - \frac{z^2}{5!} + \frac{z^4}{7!} - \cdots \end{aligned}$$

$z = 0$ est une singularité apparente.

La série converge quel que soit z.

(d) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$; $z = -2$. Soit $z+2 = u$. D'où

$$\begin{aligned} \frac{z}{(z+1)(z+2)} &= \frac{u-2}{(u-1)u} = \frac{2-u}{u}\cdot\frac{1}{1-u} = \frac{2-u}{u}(1 + u + u^2 + u^3 + \cdots) \\ &= \frac{2}{u} + 1 + u + u^2 + \cdots = \frac{2}{z+2} + 1 + (z+2) + (z+2)^2 + \cdots \end{aligned}$$

$z = -2$ est un pôle simple.

La série converge pour toute valeur de z telle que $0 < |z+2| < 1$.

(e) $\dfrac{1}{z^2(z-3)^2}$; $z = 3$. Soit $z - 3 = u$; alors d'après le développement du binôme,

$$\frac{1}{z^2(z-3)^2} = \frac{1}{u^2(3+u)^2} = \frac{1}{9u^2(1+u/3)^2}$$

$$= \frac{1}{9u^2}\left\{1 + (-2)\left(\frac{u}{3}\right) + \frac{(-2)(-3)}{2!}\left(\frac{u}{3}\right)^2 + \frac{(-2)(-3)(-4)}{3!}\left(\frac{u}{3}\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{9u^2} - \frac{2}{27u} + \frac{1}{27} - \frac{4}{243}u + \cdots$$

$$= \frac{1}{9(z-3)^2} - \frac{2}{27(z-3)} + \frac{1}{27} - \frac{4(z-3)}{243} + \cdots$$

$z = 3$ est un pôle d'ordre 2 ou pôle double.

La série converge pour toute valeur de z telle que $0 < |z-3| < 3$.

27. Développer $f(z) = \dfrac{1}{(z+1)(z+3)}$ en série de Laurent valable pour (*a*) $1 < |z| < 3$, (*b*) $|z| > 3$, (*c*) $0 < |z+1| < 2$, (*d*) $|z| < 1$.

(*a*) Par décomposition de $f(z)$ en éléments simples on obtient $\dfrac{1}{(z+1)(z+3)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z+1}\right) - \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{z+3}\right)$.

Si $|z| > 1$,

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2z(1+1/z)} = \frac{1}{2z}\left(1 - \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} - \frac{1}{z^3} + \cdots\right) = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \cdots$$

If $|z| < 3$,

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{6(1+z/3)} = \frac{1}{6}\left(1 - \frac{z}{3} + \frac{z^2}{9} - \frac{z^3}{27} + \cdots\right) = \frac{1}{6} - \frac{z}{18} + \frac{z^2}{54} - \frac{z^3}{162} + \cdots$$

Le développement demandé valable à la fois pour $|z| > 1$ et $|z| < 3$, i.e. $1 < |z| < 3$, est

$$\cdots - \frac{1}{2z^4} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z} - \frac{1}{6} + \frac{z}{18} - \frac{z^2}{54} + \frac{z^3}{162} - \cdots$$

(*b*) Si $|z| > 1$, nous avons comme dans (*a*)

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2z} - \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{2z^3} - \frac{1}{2z^4} + \cdots$$

Si $|z| > 3$,

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{2z(1+3/z)} = \frac{1}{2z}\left(1 - \frac{3}{z} + \frac{9}{z^2} - \frac{27}{z^3} + \cdots\right) = \frac{1}{2z} - \frac{3}{2z^2} + \frac{9}{2z^3} - \frac{27}{2z^4} + \cdots$$

Le développement en série de Laurent demandé, valable à la fois pour $|z| > 1$ et $|z| > 3$, i.e. $|z| > 3$, s'obtient par soustraction

$$\frac{1}{z^2} - \frac{4}{z^3} + \frac{13}{z^4} - \frac{40}{z^5} + \cdots$$

(*c*) Soit $z + 1 = u$. D'où

$$\frac{1}{(z+1)(z+3)} = \frac{1}{u(u+2)} = \frac{1}{2u(1+u/2)} = \frac{1}{2u}\left(1 - \frac{u}{2} + \frac{u^2}{4} - \frac{u^3}{8} + \cdots\right)$$

$$= \frac{1}{2(z+1)} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8}(z+1) - \frac{1}{16}(z+1)^2 + \cdots$$

valable pour $|u| < 2$, $u \neq 0$ ou $0 < |z+1| < 2$.

(*d*) Si $|z| < 1$,

$$\frac{1}{2(z+1)} = \frac{1}{2(1+z)} = \tfrac{1}{2}(1 - z + z^2 - z^3 + \cdots) = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}z^2 - \tfrac{1}{2}z^3 + \cdots$$

Si $|z| < 3$, nous avons d'après la partie (*a*)

$$\frac{1}{2(z+3)} = \frac{1}{6} - \frac{z}{18} + \frac{z^2}{54} - \frac{z^3}{162} + \cdots$$

Le développement demandé, valable à la fois pour $|z| < 1$ et $|z| < 3$, i.e. $|z| < 1$, est obtenu par soustraction

$$\frac{1}{3} - \frac{4}{9}z + \frac{13}{27}z^2 - \frac{40}{81}z^3 + \cdots$$

C'est une série de Taylor.