TD n°5 : Résidus - Correction

Prolongement analytique

Exercice 1 :

Montrer que les séries suivantes sont des prolongements analytiques l'une de l'autre.

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad , \qquad et \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

Montrer que les séries (*a*) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}}$ et (*b*) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$ sont des prolongements analytiques l'une de l'autre.

(*a*) D'après le critère de d'Alembert, la série converge pour $|z| < 2$ [région ombrée dans la figure 6.6]. Dans ce cercle la série [qui est une série géométrique de premier terme $1/2$ et de raison $z/2$] est convergente et représente la fonction $\frac{1/2}{1 - z/2} = \frac{1}{2-z}$.

(*b*) D'après le critère de d'Alembert la série converge pour $\left|\frac{z-i}{2-i}\right| < 1$, i.e. $|z - i| < \sqrt{5}$, [voir figure 6.6]. Dans ce cercle la série [qui est une série géométrique de premier terme $1/(2-i)$ et de raison $(z-i)/(2-i)$] converge et représente la fonction

$$\frac{1/(2-i)}{1-(z-i)/(2-i)} = \frac{1}{2-z}.$$

Les séries entières représentent la même fonction dans la partie commune aux deux domaines de convergence limités par les cercles $|z| = 2$ et $|z - i| = \sqrt{5}$ on en déduit que chacune est un prolongement analytique de l'autre.

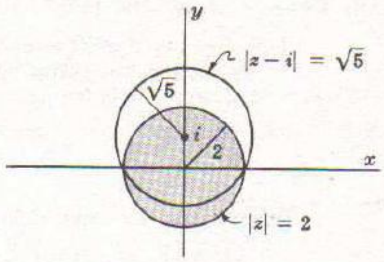

Fig. 6-6

Calcul de résidus

Résidus.

Soit f est analytique partout à l'intérieur, et sur une courbe fermée simple C excepté en $z = a$ (qui est un pôle d'ordre n).

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

1°) $\boxed{\oint_C f(z)dz = 2i\pi\, a_{-1}}$

2°) $\boxed{a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}}$

Exercice 2 :

Trouver les résidus des fonctions données aux pôles précisés.

$$f\ définie\ par\ f(z)=\frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)}\quad aux\ pôles\ \ z=2,i,-i$$

$$g\ définie\ par\ g(z)=\frac{1}{z\,(z+2)^3}\quad aux\ pôles\ \ z=0,-2$$

$$h\ définie\ par\ h(z)=\frac{z\,e^{zt}}{(z-3)^2}\quad au\ pôle\ \ z=3$$

$$k\ définie\ par\ k(z)=cotg\ z\ \ au\ pôle\ \ z=5\pi$$

1°)

Le résidu de f en $z=2$ est : $\lim_{z\to a}\ \{(z-2)\ \ f(z)\}=\boxed{\frac{4}{5}}$

Le résidu de f en $z=i$ est : $\lim_{z\to a}\ \{(z-i)\ \ f(z)\}=\boxed{\frac{1-2i}{10}}$

Le résidu de f en $z=-i$ est : $\lim_{z\to a}\ \{(z+i)\ \ f(z)\}=\boxed{\frac{1+2i}{10}}$

2°)

Le résidu de g en $z=0$ est : $\lim_{z\to 0}\ \{z\,g(z)\}=\frac{1}{8}$

Le résidu de g en $z=-2$ est : $\frac{1}{(2)!}\ \lim_{z\to -2}\ \frac{d^2}{dz^2}\{(z+2)^3\ g(z)\}\ =\frac{1}{2}\lim_{z\to -2}\frac{2}{z^3}=\boxed{-\frac{1}{8}}$

3°)

Le résidu de h en $z=3$ est :

$$\frac{1}{(1)!}\ \lim_{z\to 3}\ \frac{d}{dz}\{(z-3)^2\ h(z)\}\ =\ \lim_{z\to 3}(e^{zt}+zte^{zt})=\boxed{e^{3t}+3te^{3t}}$$

4°)

Le résidu de k en $z=5\pi$ est :

$$\lim_{z\to 5\pi}\ \{(z-5\pi)\ k(z)\}=\left(\lim_{z\to 5\pi}\left\{\frac{(z-5\pi)}{\sin z}\right\}\right)\left(\lim_{z\to 5\pi}\{\cos z\}\right)=\left(\lim_{z\to 5\pi}\left\{\frac{1}{\cos z}\right\}\right)(-1)=\boxed{1}$$

Exercice 3 :

Trouver les résidus des fonctions données aux pôles à distances finis.

1. f définie par $f(z) = \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$.
2. g définie par $g(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$.

(a) $f(z)$ possède un pôle double en $z = -1$ et des pôles simples en $z = \pm 2i$.

Méthode 1.

Le résidu en $z = -1$ est

$$\lim_{z \to -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{dz}\left\{(z+1)^2 \cdot \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right\} = \lim_{z \to -1} \frac{(z^2+4)(2z-2)-(z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2} = -\frac{14}{25}$$

Le résidu en $z = 2i$ est

$$\lim_{z \to 2i}\left\{(z-2i) \cdot \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)}\right\} = \frac{-4-4i}{(2i+1)^2(4i)} = \frac{7+i}{25}$$

Le résidu en $z = -2i$ est

$$\lim_{z \to -2i}\left\{(z+2i) \cdot \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z-2i)(z+2i)}\right\} = \frac{-4+4i}{(-2i+1)^2(-4i)} = \frac{7-i}{25}$$

Méthode 2.

Le résidu en $z = 2i$ est

$$\lim_{z \to 2i}\left\{\frac{(z-2i)(z^2-2z)}{(z+1)^2(z^2+4)}\right\} = \left\{\lim_{z \to 2i} \frac{z^2-2z}{(z+1)^2}\right\}\left\{\lim_{z \to 2i} \frac{z-2i}{z^2+4}\right\}$$

$$= \frac{-4-4i}{(2i+1)^2} \cdot \lim_{z \to 2i} \frac{1}{2z} = \frac{-4-4i}{(2i+1)^2} \cdot \frac{1}{4i} = \frac{7+i}{25}$$

d'après la règle de L'Hospital. De même en remplaçant i par $-i$ nous pouvons obtenir le résidu en $z = -2i$.

(b) $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$ possède des pôles doubles en $z = 0, \pm\pi, \pm 2\pi, \ldots$, i.e. $z = m\pi$ avec $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

Méthode 1.

Le résidu en $z = m\pi$ est

$$\lim_{z\to m\pi} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left\{(z-m\pi)^2 \frac{e^z}{\sin^2 z}\right\}$$

$$= \lim_{z\to m\pi} \frac{e^z[(z-m\pi)^2 \sin z + 2(z-m\pi)\sin z - 2(z-m\pi)^2 \cos z]}{\sin^3 z}$$

En posant $z - m\pi = u$ ou $z = u + m\pi$, cette limite peut être écrite sous la forme

$$\lim_{u\to 0} e^{u+m\pi}\left\{\frac{u^2\sin u + 2u\sin u - 2u^2\cos u}{\sin^3 u}\right\}$$

$$= e^{m\pi}\left\{\lim_{u\to 0}\frac{u^2\sin u + 2u\sin u - 2u^2\cos u}{\sin^3 u}\right\}$$

On peut utiliser la règle de L'Hospital, toutefois il est plus simple de remarquer d'abord que $\lim_{u\to 0}\frac{u^3}{\sin^3 u} = \lim_{u\to 0}\left(\frac{u}{\sin u}\right)^3 = 1$ et de mettre l'expression considérée sous la forme

$$e^{m\pi}\lim_{u\to 0}\left(\frac{u^2\sin u + 2u\sin u - 2u^2\cos u}{u^3}\cdot\frac{u^3}{\sin^3 u}\right)$$

$$= e^{m\pi}\lim_{u\to 0}\frac{u^2\sin u + 2u\sin u - 2u^2\cos u}{u^3} = e^{m\pi}$$

en utilisant plusieurs fois la règle de L'Hospital. On peut également pour chercher cette limite, utiliser les développements $\sin u = u - u^3/3! + \cdots$, $\cos u = 1 - u^2/2! + \cdots$

Méthode 2 (à l'aide des séries de Laurent)

Cette méthode consiste à développer $f(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$ en série de Laurent dans le voisinage de $z = m\pi$ et à chercher le coefficient de $\frac{1}{z-m\pi}$ qui est le résidu demandé. On pose pour simplifier les calculs, $z = m\pi + u$. On doit alors développer la fonction en série de Laurent dans le voisinage de $u = 0$; la fonction considérée prend alors la forme $\frac{e^{m\pi u}}{\sin^2(m\pi+u)} = \frac{e^{m\pi}e^u}{\sin^2 u}$. A l'aide des développements de Maclaurin de e^u et $\sin u$ on trouve par division

$$\frac{e^{m\pi}e^u}{\sin^2 u} = \frac{e^{m\pi}\left(1+u+\frac{u^2}{2!}+\frac{u^3}{3!}+\cdots\right)}{\left(u-\frac{u^3}{3!}+\frac{u^5}{5!}-\cdots\right)^2} = \frac{e^{m\pi}\left(1+u+\frac{u^2}{2}+\cdots\right)}{u^2\left(1-\frac{u^2}{6}+\frac{u^4}{120}-\cdots\right)^2}$$

$$= \frac{e^{m\pi}\left(1+u+\frac{u^2}{2!}+\cdots\right)}{u^2\left(1-\frac{u^2}{3}+\frac{2u^4}{45}+\cdots\right)} = e^{m\pi}\left(\frac{1}{u^2}+\frac{1}{u}+\frac{5}{6}+\frac{u}{3}+\cdots\right)$$

le résidu est donc $e^{m\pi}$.

Théorème des Résidus.

Théorème des Résidus.

Soit f est analytique partout à l'intérieur, et sur une courbe fermée simple $\mathcal{C}$ excepté en un nombre fini de pôles a, b, c … intérieurs à $\mathcal{C}$ alors :

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2i\pi \ (Somme\ des\ résidus\ de\ f\ aux\ pôles\ a, b, c, \dots)}$$

Exercice 4 :

Reprendre les fonctions de l'exercice 2 et calculer :

1. $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz$ pour $\mathcal{C}$ définie par $a)\ |z| = \frac{3}{2}\ \ et\ \ b)\ |z| = 10$
2. $\oint_{\mathcal{C}} g(z)dz$ pour $\mathcal{C}$ définie par $a)\ |z| = 1\ \ et\ \ b)\ |z| = 3$
3. $\oint_{\mathcal{C}} h(z)dz$ pour $\mathcal{C}$ définie par $a)\ |z| = 4$

1°)

a) $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2i\pi \left(\frac{1-2i}{10} + \frac{1+2i}{10}\right) = \boxed{\frac{2i\pi}{5}}$

b) $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2i\pi \left(\frac{4}{5} + \frac{1-2i}{10} + \frac{1+2i}{10}\right) = \boxed{2i\pi}$

2°)

a) $\oint_{\mathcal{C}} g(z)dz = 2i\pi \left(\frac{1}{8}\right) = \boxed{\frac{i\pi}{4}}$

b) $\oint_{\mathcal{C}} g(z)dz = 2i\pi \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{8}\right) = \boxed{0}$

3°)

a) $\oint_{\mathcal{C}} h(z)dz = \boxed{2i\pi\,(e^{3t} + 3te^{3t})}$

Exercice 5 :

Calculer $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz$ pour $\mathcal{C}$ définie par $a)\ |z| = \frac{3}{2}\ \ et \ \ b)\ |z| = 10$

$$avec\ f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$$

- Le résidu au pôle simple $z = 1$ est : $\lim_{z\to 1} \{z\, f(z)\} = \boxed{\frac{e}{16}}$
- Le résidu au pôle double $z = -3$ est : $\frac{1}{(1)!} \lim_{z\to -3} \frac{d}{dz}\{(z+3)^2 f(z)\} = \boxed{\frac{-5e^{-3}}{16}}$

a) $|z| = \frac{3}{2}\ donc \quad \oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2i\pi\left(\frac{e}{16}\right) = \boxed{\frac{i\pi e}{8}}$

b) $|z| = 10\ donc \quad \oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2i\pi\left(\frac{e}{16} + \frac{-5e^{-3}}{16}\right) = \boxed{\frac{i\pi\,(e-5e^{-3})}{8}}$