TD n°5 : Résidus

Prolongement analytique

Exercice 1 :

Montrer que les séries suivantes sont des prolongements analytiques l'une de l'autre.

$$A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{2^{n+1}} \quad , \qquad et \quad B = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z-i)^n}{(2-i)^{n+1}}$$

Calcul de résidus

Résidus.

Soit f est analytique partout à l'intérieur, et sur une courbe fermée simple $\mathcal{C}$ excepté en $z = a$ (qui est un pôle d'ordre n).

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}} + \cdots + a_0 + a_1(z-a) + a_2(z-a)^2 + \cdots$$

1°) $\boxed{\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2i\pi\, a_{-1}}$

2°) $\boxed{a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{(z-a)^n f(z)\}}$

Exercice 2 :

Trouver les résidus des fonctions données aux pôles précisés.

$$f \text{ définie par } f(z) = \frac{z^2}{(z-2)(z^2+1)} \quad \text{aux pôles } z = 2, i, -i$$

$$g \text{ définie par } g(z) = \frac{1}{z\,(z+2)^3} \quad \text{aux pôles } z = 0, -2$$

$$h \text{ définie par } h(z) = \frac{z\, e^{zt}}{(z-3)^2} \quad \text{au pôle } z = 3$$

$$k \text{ définie par } k(z) = cotg\, z \quad \text{au pôle } z = 5\pi$$

Exercice 3 :

Trouver les résidus des fonctions données aux pôles à distances finis.

1. f définie par

$$f(z) = \frac{z^2 - 2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

2. g définie par

$$g(z) = \frac{e^z}{\sin^2 z}$$

Théorème des Résidus.

Théorème des Résidus.

Soit f est analytique partout à l'intérieur, et sur une courbe fermée simple $\mathcal{C}$ excepté en un nombre fini de pôles a, b, c … intérieurs à $\mathcal{C}$ alors :

$$\boxed{\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz = 2i\pi \; (Somme\ des\ résidus\ de\ f\ aux\ pôles\ a, b, c, \dots.)}$$

Exercice 4 :

Reprendre les fonctions de l'exercice 2 et calculer :

1. $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz$ pour $\mathcal{C}$ définie par $a)\ |z| = \frac{3}{2}$ et $b)\ |z| = 10$
2. $\oint_{\mathcal{C}} g(z)dz$ pour $\mathcal{C}$ définie par $a)\ |z| = 1$ et $b)\ |z| = 3$
3. $\oint_{\mathcal{C}} h(z)dz$ pour $\mathcal{C}$ définie par $a)\ |z| = 4$

Exercice 5 :

Calculer $\oint_{\mathcal{C}} f(z)dz$ pour $\mathcal{C}$ définie par $a)\ |z| = \frac{3}{2}$ et $b)\ |z| = 10$

$$avec\ \ f(z) = \frac{e^z}{(z-1)(z+3)^2}$$