M. Duffaud

Interrogation de T.D. n°1 : IPSA. Maths Spé A2 : CORRECTION

Exercice 1.(3 points)

1. $\vec{u} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \wedge (\vec{a} + 2\vec{b}) = \vec{0}$ par colinéarité.
2. $\vec{v} = (\vec{a} + 2\vec{b}) \wedge (\vec{a} - 2\vec{b}) = 4\vec{b} \wedge \vec{a}$
3. $w = \vec{v} \cdot \vec{a} = 0$ car $(4\vec{b} \wedge \vec{a})$ est orthogonal à $\vec{a}$

Exercice 2. (1+3=4 points)

On pose pour x réel : $\vec{F}(x) = \begin{pmatrix} 2x^2+1 \\ 1 \\ 2-x \end{pmatrix}$ et $\vec{G}(x) = \begin{pmatrix} x+2 \\ x^3 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions $\vec{F}$ et $\vec{G}$. On a $Df = Dg = \mathbb{R}$
2. Calculer la dérivée : $(\vec{F} \wedge \vec{G})'$

$$\vec{F} \wedge \vec{G}(x) = \begin{pmatrix} x^4 - 2x^3 + 1 \\ -3x^2 - 3 \\ 2x^5 + x^3 - x - 2 \end{pmatrix} \text{ et } \boxed{(\vec{F} \wedge \vec{G})'(x) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 6x^2 \\ -6x \\ 10x^4 + 3x^2 - 1 \end{pmatrix}}$$

Exercice 3.(1+3+2+1=7 points)

On pose pour (x,y) $dans$ $\mathbb{R}^2$: $f(x,y) = \begin{pmatrix} x+2y \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}$ et $g(x,y) = \begin{pmatrix} y\,x^2 \\ y + 2\sqrt{x} \end{pmatrix}$

1. Ensembles de définition de f et g. $\boxed{Df = \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\} \; et \; Dg = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}$
2. Domaine de définition de la composée $f \, o \, g$: $\boxed{D_{fog} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \; tel \; que \; x \geq 0 \; et \; y \neq -2\sqrt{x}\}}$
3. Déterminer $f \, o \, g$:On a $\boxed{f \, o \, g \, (x) = \begin{pmatrix} x^2y + 2y + 4\sqrt{x} \\ \frac{x^2y}{y+2\sqrt{x}} \end{pmatrix}}$
4. Déterminer les dérivées partielles de la fonction f $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{y} \end{pmatrix}}$ et $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-x}{y^2} \end{pmatrix}}$

Exercice 4. .(1+2+3=6 points)

1. $f(x,y,z) = 3zx^2 + (xy+1)^2$ *alors :* $\boxed{\overrightarrow{grad} f = (2x(y^2 + 3z) + 2y \,; 2yx^2 + 2x \,; 3x^2)}$
2. $\vec{g}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+2y \\ sin(zxy) \\ \frac{x}{z} \end{pmatrix}$

$$\boxed{div(\vec{g}) = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} = xz\,cos(xyz) - \frac{x}{z^2} + 1}$$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{g} = \left(+ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & g_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & g_3 \end{vmatrix} \;;\; - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & g_1 \\ \frac{\partial}{\partial z} & g_3 \end{vmatrix} \;;\; + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & g_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & g_2 \end{vmatrix} \right) = \left(-xycos(xyz); \frac{-1}{z}\,; yzcos(xyz) - 2\right)}$$

M. Duffaud

Interrogation de T.D. n°1 : IPSA. Maths Spé B2 : CORRECTION

Exercice 1.(3 points)

Simplifiez les expressions suivantes ou exprimez-les en fonction des vecteurs $\vec{a}\ et\ \vec{b}\ de\ \mathbb{R}^3$

1. $\vec{u} = \left(2\,\vec{a} + \vec{b}\right) \wedge \left(2\vec{a} - \vec{b}\right) = 4\,\vec{b} \wedge \vec{a}$
2. $v = \left(\vec{a} + 2\,\vec{b}\right).\left(\vec{a} - 2\,\vec{b}\right) = \|\vec{a}\|^2 - 4\,\|\vec{b}\|^2$
3. $\vec{w} = (\vec{u}\,.\vec{a})\,\vec{u} = \vec{0}$ car $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$ est orthogonal à $\vec{a}$ donc $\vec{u}\,.\vec{a} = 0$

Exercice 2.(1+3=4 points)

On pose pour x réel : $\vec{F}(x) = \begin{pmatrix} 3-x \\ 2x+1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{G}(x) = \begin{pmatrix} 2x-1 \\ -1 \\ x^3 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions $\vec{F}\ et\ \vec{G}$. On a $\boxed{Df = Dg = \mathbb{R}}$
2. Calculer la dérivée : $\left(\vec{F} \wedge \vec{G}\right)'$

$\vec{F} \wedge \vec{G}(x) = \begin{pmatrix} 2x^4 + x^3 + 1 \\ x^4 - 3\,x^3 + 2x - 1 \\ -4x^2 + x - 2 \end{pmatrix}$ et $\boxed{\left(\vec{F} \wedge \vec{G}\right)'(x) = \begin{pmatrix} 8x^3 + 3x^2 \\ 4x^3 - 9x^2 + 2 \\ 1 - 8x \end{pmatrix}}$

Exercice 3..(1+3+2+1=7 points)

On pose pour $(x,y)\ dans\ \mathbb{R}^2$: $f(x,y) = \begin{pmatrix} 2x+2 \\ \frac{y}{x+1} \end{pmatrix}$ et $g(x,y) = \begin{pmatrix} y^2\,x \\ y + \sqrt{x} \end{pmatrix}$

1. Ensembles de définition de $f\ et\ g$. $\boxed{Df = \mathbb{R}\backslash\{-1\} \times \mathbb{R}\ et\ Dg = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}}$
2. $\boxed{D_{fog} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ tel\ que\ x \geq 0\}}$ car $y^2x \geq 0\ si\ x \geq 0$ et graphique.
3. Déterminer $f\ o\ g$: $\boxed{f\ o\ g\ (x) = \begin{pmatrix} 2y^2x + 2 \\ \frac{y+\sqrt{x}}{y^2x+1} \end{pmatrix}}$
4. Déterminer les dérivées partielles des fonctions f $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-y}{(x+1)^2} \end{pmatrix}}$ et $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{x+1} \end{pmatrix}}$

Exercice 4. .(1+2+3=6 points)

1. $f(x,y,z) = 2y^2 + sin(xyz+1)$
   $\boxed{\overrightarrow{grad}f = (yz\,cos(xyz+1); xz\,cos(xyz+1) + 4y\,; xy\,cos(xyz+1)\,)}$
2. $g(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+2z \\ zy\,x^2 \\ \frac{y}{x+1} \end{pmatrix}$ $\boxed{div(\vec{g}) = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} = x^2z + 1}$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\,\vec{g} = \left(+ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & g_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & g_3 \end{vmatrix}\ ; - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & g_1 \\ \frac{\partial}{\partial z} & g_3 \end{vmatrix}\ ; + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & g_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & g_2 \end{vmatrix} \right) = \left(\frac{1}{x+1} - x^2y\,; \frac{y}{(x+1)^2} + 2\,; 2xyz\right)}$$

M. Duffaud

Interrogation de T.D. n°1 : IPSA. <u>Maths Spé </u>C2 : CORRECTION

<u>Exercice 1.(3 points)</u>

Simplifiez les expressions suivantes ou exprimez-les en fonction des vecteurs $\vec{a}\ et\ \vec{b}\ de\ \mathbb{R}^3$

1. $\vec{u} = \left(\vec{a} + 2\,\vec{b}\right) \wedge \left(\vec{a} + 2\,\vec{b}\right) = \vec{0}$ par colinéarité.
2. $\vec{v} = \left(\vec{a} + 2\,\vec{b}\right) \wedge \left(\vec{a} - 2\,\vec{b}\right) = 4\,\vec{b} \wedge \vec{a}$
3. $w = 2\,\vec{v}\,.\vec{a} = 0$ car $\vec{b} \wedge \vec{a}$ est orthogonal à $\vec{a}$

<u>Exercice 2.(1+3=4 points)</u>

On pose pour x réel : $\vec{F}(x) = \begin{pmatrix} 2x^2+1 \\ 1 \\ 2-\mathrm{x} \end{pmatrix}$ et $\vec{G}(x) = \begin{pmatrix} x+2 \\ x^3 \\ 1 \end{pmatrix}$

1. Déterminer les ensembles de définition des fonctions $\vec{F}\ et\ \vec{G}$. $\boxed{Df = Dg = \mathbb{R}}$
2. Calculer la dérivée : $\left(\vec{F} \wedge \vec{G}\right)'$

$\vec{F} \wedge \vec{G}(x) = \begin{pmatrix} x^4 - 2\,x^3 + 1 \\ -3\,x^2 + 3 \\ 2x^5 + x^3 - x - 2 \end{pmatrix}$ et $\boxed{\left(\vec{F} \wedge \vec{G}\right)'(x) = \begin{pmatrix} 4x^3 - 6\,x^2 \\ -6\,x \\ 10x^4 + 3x^2 - 1 \end{pmatrix}}$

<u>Exercice 3.(1+3+2+1=7 points)</u>

On pose pour $(x,y)\ dans\ \mathbb{R}^2$: $f(x,y) = \begin{pmatrix} x+2y \\ \frac{x}{y} \end{pmatrix}$ et $g(x,y) = \begin{pmatrix} y\,x^2 \\ x + 2\sqrt{y} \end{pmatrix}$

1. Ensembles de définition de $f\ et\ g$. $\boxed{Df = \mathbb{R} \times \mathbb{R}\backslash\{0\}\ et\ Dg = \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+}$
2. Domaine de définition de $f\ o\ g$ $\boxed{D_{fog} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2\ tel\ que\ y \geq 0\ et\ x \neq -2\sqrt{y}\right\}}$ et graphique.
3. Déterminer $f\ o\ g$: $\boxed{f\ o\ g\ (x) = \begin{pmatrix} x^2y + 4\sqrt{y} + 2x \\ \frac{x^2y}{x+2\sqrt{y}} \end{pmatrix}}$
4. Déterminer les dérivées partielles de la fonction f $\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{y} \end{pmatrix}}$ et $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{-x}{y^2} \end{pmatrix}}$

<u>Exercice 4.(1+2+3=6 points)</u>

1. $f(x,y,z) = 3z^2 + ln(xyz+1)$ $\boxed{\overrightarrow{grad}f = \left(\frac{yz}{xyz+1}\ ;\ \frac{xz}{xyz+1}\ ;\ \frac{xy}{(xyz+1)} + 6z\right)}$

$g(x,y,z) = \begin{pmatrix} z+2y \\ \sin(xy) \\ (xyz+1)^2 \end{pmatrix}$

$\boxed{div(\vec{g}) = \frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z} = xcos\ xy + 2x^2y^2z + 2xy = x\,cos(xy) + 2xy(xyz+1)}$

$$\boxed{\overrightarrow{rot}\ \vec{g} = \left(+ \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial y} & g_2 \\ \frac{\partial}{\partial z} & g_3 \end{vmatrix}\ ;\ - \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & g_1 \\ \frac{\partial}{\partial z} & g_3 \end{vmatrix}\ ;\ + \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & g_1 \\ \frac{\partial}{\partial y} & g_2 \end{vmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 2xz(xyz+1) \\ 1 - 2xy^2z^2 - 2yz \\ y\cos(xy) - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xz(xyz+1) \\ 1 - 2yz(xyz+1) \\ y\cos(xy) - 2 \end{pmatrix}}$$