

## Interrogation de T.D. n°2 : IPSA. Maths Spé 1

### Exercice 1.

- On introduit la fonction de changement de variable notée  $\Phi$ .

Ici on a :  $\Phi(x, y) = (x + y; x - y) = (u, v)$  La fonction  $\Phi$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

$$\text{On a alors : } \begin{cases} u = x + y \\ v = x - y \end{cases} \text{ et donc } \begin{cases} x = \frac{u+v}{2} \\ y = \frac{u-v}{2} \end{cases}$$

- On procède au changement de variable.

Effectuer un changement de variable consiste à chercher une fonction  $g : (u, v) \mapsto g(u, v)$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que la fonction composée  $f = g \circ \Phi$  vérifie la condition donnée (E).

- Utilisation des matrices jacobiniennes.

$f = g \circ \Phi$  et donc

$$J_f(x, y) = J_g(\Phi(x, y)) \times J_\Phi(x, y)$$

Soit puisque  $\Phi(x, y) = (u, v)$ ,

$$J_f(x, y) = J_g(u, v) \times J_\Phi(x, y)$$

On obtient l'égalité :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y); \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left( \frac{\partial g}{\partial u}(u, v); \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right) \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y); \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left( \frac{\partial g}{\partial u}(u, v); \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right) \times \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y); \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left( \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v); \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right)$$

Et donc par identification :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \end{cases}$$

- On remplace les dérivées partielles de  $f$  par celles de  $g$  dans l'expression de départ (E).

(E) devient alors :  $\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$

et donc :  $2 \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 0$

La fonction  $g$  ne dépend donc pas de  $v$ , elle est de la forme  $g(u, v) = h(u)$  où  $h$  est une fonction de classe  $C^1$

Donc, les solutions de l'EDP sont les fonctions  $C^1$  de la forme :  $f(x, y) = h(x + y)$  puisque  $u = x + y$ .

Un exemple de fonction qui est solution de l'équation est :  $f(x, y) = \exp(x + y)$

On a alors :  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \exp(x + y)$

### Exercice 2.

- $\Gamma$  : arc AB :

Le cercle C est d'équation :  $x^2 + y^2 = 4$

Par passage en coordonnées polaires,  $\begin{cases} x = x(t) = 2 \cos t \\ y = y(t) = 2 \sin t \end{cases}$  avec  $t$  qui varie de 0 à  $\frac{\pi}{2}$ .

Donc  $\begin{cases} x'(t) = -2 \sin t \\ y'(t) = 2 \cos t \end{cases}$

- Calcul de l'intégrale curviligne.

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [4 \cos t \sin t (-2 \sin t) + 2 \sin t (2 \cos t)] dt = \left[ -\frac{8}{3} \sin^3(t) + 2 \sin^2(t) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boxed{-\frac{2}{3}}$$

### Exercice 3.

Le domaine D correspond aux points extérieurs au cercle C de centre O et de rayon 1, qui sont intérieurs au carré O, (1 ; 0) (1 ; 1), (0 ; 1). Pour  $x$  qui varie de 0 à 1,  $y$  varie de  $\sqrt{1 - x^2}$  à 1

$$K = \iint_D \frac{xy}{1 + x^2 + y^2} dx dy = \int_0^1 x \left[ \int_{\sqrt{1-x^2}}^1 \left( \frac{y}{1 + x^2 + y^2} \right) dy \right] dx$$

$$K = \int_0^1 \frac{x}{2} [\ln(x^2 + y^2 + 1)]_{\sqrt{1-x^2}}^1 dx$$

$$2 \times K = \int_0^1 x \ln \left( \frac{x^2 + 2}{2} \right) dx$$

Par IPP :

$$2 \times K = \int_0^1 x \ln \left( \frac{x^2 + 2}{2} \right) dx = \left[ \frac{x^2}{2} \ln \left( \frac{x^2 + 2}{2} \right) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{2x}{x^2 + 2} dx$$

$$2 \times K = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{3}{2} \right) - \int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 2} dx$$

Calculons  $\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 2} dx$ .

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 2} dx = \int_0^1 \frac{x^3 + 2x - 2x}{x^2 + 2} dx = \int_0^1 \frac{x(x^2 + 2) - 2x}{x^2 + 2} dx = \int_0^1 x - \frac{2x}{x^2 + 2} dx = \left[ \frac{x^2}{2} - \ln|x^2 + 2| \right]_0^1$$

$$\int_0^1 \frac{x^3}{x^2 + 2} dx = \boxed{-\ln 3 + \ln 2 + \frac{1}{2}}$$

Donc on obtient :  $2 \times K = \frac{1}{2} \ln \left( \frac{3}{2} \right) - \left( -\ln 3 + \ln 2 + \frac{1}{2} \right)$  soit  $K = \frac{3}{4} \ln \left( \frac{3}{2} \right) - \frac{1}{4}$

## Interrogation de T.D. n°2 : IPSA. Maths Spé 2

Nom : \_\_\_\_\_

### Exercice 1.

- On introduit la fonction de changement de variable notée  $\Phi$ .

Ici on a :  $\Phi(x, y) = (5x + 3y ; x - y) = (u, v)$  La fonction  $\Phi$  est un  $C^1$  difféomorphisme de  $\mathbb{R}^2$  dans  $\mathbb{R}^2$ .

$$\text{On a alors : } \begin{cases} u = 5x + 3y \\ v = x - y \end{cases}$$

- On procède au changement de variable.

Effectuer un changement de variable consiste à chercher une fonction  $g : (u, v) \mapsto g(u, v)$  de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R}^2$  telle que la fonction composée  $f = g \circ \Phi$  vérifie la condition donnée (E).

- Utilisation des matrices jacobiniennes.

$$f = g \circ \Phi \quad \text{et donc} \quad J_f(x, y) = J_g(\Phi(x, y)) \times J_\Phi(x, y)$$

$$\text{Soit puisque } \Phi(x, y) = (u, v), \quad \text{on a} \quad J_f(x, y) = J_g(u, v) \times J_\Phi(x, y)$$

On obtient l'égalité :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) ; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left( \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) ; \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right) \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) ; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left( \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) ; \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right) \times \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\left( \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) ; \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \left( 5 \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) ; 3 \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right)$$

Et donc par identification :

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5 \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3 \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \end{cases}$$

- On remplace les dérivées partielles de  $f$  par celles de  $g$  dans l'expression de départ (E).

$$3 \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 5 \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) : (E) \quad (E) \text{ devient alors : } 15 \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + 3 \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 15 \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) - 5 \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)$$

$$\text{et donc :} \quad 8 \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) = 0$$

La fonction  $g$  ne dépend donc pas de  $v$ , elle est de la forme  $g(u, v) = h(u)$  où  $h$  est une fonction de classe  $C^1$

**Donc, les solutions de l'EDP sont les fonctions  $C^1$  de la forme :  $f(x, y) = h(5x + 3y)$  puisque  $u = 5x + 3y$ .**

## Exercice 2.

- $\Gamma$  : l'arc de parabole :

Sur cet arc,  $\begin{cases} x = 2y^2 - 1 \\ y \text{ varie de } 1 \text{ à } 0 \end{cases}$  Le paramétrage est donc :  $\begin{cases} x = x(t) = 2t^2 - 1 \\ y = y(t) = t \end{cases}$  soit :  $\begin{cases} x'(t) = 4t \\ y'(t) = 1 \end{cases}$

- Calcul de l'intégrale curviligne.

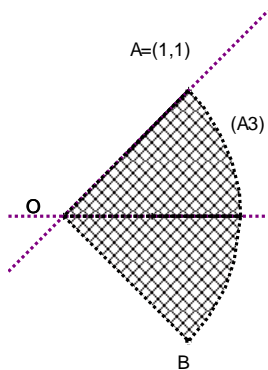
$$I = \int_{\Gamma} y^2 dx + x^2 dy = \int_1^0 t^2 (4t dt) + (2t^2 - 1)^2 dt = \left[ \frac{4t^5}{5} + t^4 - \frac{4t^3}{3} + t \right]_1^0 = \boxed{-\frac{22}{15}}$$

## Exercice 3.

1. Calculons  $I_{A_2} = \iint_{A_2} (x^2 - y) dx dy$

Sur  $A_2$  on a  $\begin{cases} 0 \leq x \leq 1 \\ -x \leq y \leq x \end{cases}$  donc  $I_{A_2} = \iint_{A_2} (x^2 - y) dx dy = \int_0^1 \left( \int_{-x}^x (x^2 - y) dy \right) dx = \boxed{\frac{1}{2}}$

2. Calculons  $I_{A_3} = \iint_{A_3} (x^2 - y) dx dy$



On effectue un changement de variable en coordonnées polaires.

Posons  $\begin{cases} x = r \cos t \\ y = r \sin t \end{cases}$  et donc  $\Phi$  l'application de  $D = [0; 1] \times [-\frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{4}]$  dans  $A_3$ , définie par :  $\Phi(r, t) = \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \end{pmatrix}$ .

$\Phi$  est **noté pas** une bijection et est de classe  $C^1(D)$  (cas où  $r=0$ ,  $t$  quelconque) mais on peut tout de même faire ce changement de variables en raisonnant sur l'intérieur de  $D$ .

On sait que  $\det J_{\Phi}(r, t) = \begin{vmatrix} \cos t & -r \sin t \\ \sin t & r \cos t \end{vmatrix} = r$

$$I_{A_3} = \iint_{A_3} (x^2 - y) dx dy = \iint_D f(\Phi(r, t)) \times |\det J_{\Phi}(r, t)| dr dt = \iint_D f(\Phi(r, t)) \times |\det J_{\Phi}(r, t)| dr dt$$

$$I_{A_3} = \iint_{A_3} (x^2 - y) dx dy = \int_0^{\sqrt{2}} \left( \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} (r^3 \cos^2 t - r^2 \sin t) dt \right) dr$$

Or  $r^3 \cos^2 t - r^2 \sin t = \frac{r^3}{2} (\cos 2t + 1) - r^2 \sin t$

$$I_{A_3} = \int_0^{\sqrt{2}} \left[ \frac{r^3}{2} \left( \frac{\sin 2t}{2} + t \right) + r^2 \cos t \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dr = \int_0^{\sqrt{2}} \left[ \frac{r^3}{2} \left( \frac{\sin 2t}{2} + t \right) + r^2 \cos t \right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} dr = \int_0^{\sqrt{2}} \left( \frac{\pi + 2}{4} r^3 \right) dr$$

$$\boxed{I_{A_3} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}}$$

3. Calculons  $I_{A_1} = \iint_{A_1} (x^2 - y) dx dy$

En appliquant la relation de Chasles pour les intégrales doubles on a facilement  $I_{A_1} = I_{A_3} - I_{A_2} = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} = \frac{\pi}{4}$