Interrogation de T.D. n°4 – B : IPSA. Maths Spé - CORRECTION

Exercice 1 : Question de cours. (4 points)

1. Donner la définition du produit scalaire d'un espace euclidien.

On appelle *produit scalaire* sur E toute application φ : $E^2 \to \mathbb{R}$ telle que : pour tout vecteurs x, y et y' de E et k un réel.

a) φ est *symétrique* : $\varphi\,(x,y) = \varphi\,(y,x)$

b) φ est *linéaire par rapport à la 2ème variable* : $\varphi\,(x,ky+y') = k.\varphi\,(x,y) + \varphi\,(x,y')$

c) φ est *positive* : $\varphi\,(x,x) \geq 0$

d) φ est *définie* : $\varphi\,(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

On dit qu'un produit scalaire sur un $\mathbb{R}$-ev est une forme bilinéaire, symétrique et définie positive.

2.

a. Que dire du déterminant d'une isométrie d'un espace euclidien ?

Le déterminant d'une isométrie vaut 1 ou -1

b. Démontrer ce résultat.

On a si $A = Mat_{(i,j,k)}(f)$ est orthogonale, soit $\boxed{{}^tAA = Id}$.

Alors : $\boxed{\det({}^tAA) = \det Id = 1}$

Or $\det({}^tAA) = \det({}^tA)\det(A)$ et puisque $\det({}^tA) = \det(A)$ on obtient la relation

$$(\det(A))^2 = 1$$

Le déterminant d'une isométrie vaut donc 1 ou -1.

Exercice 2 : Isométries de $\mathbb{R}^3$. (1+7+5=13 points)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ un espace euclidien de base canonique $B = (i,j,k)$, et A la matrice dans la base B d'un endomorphisme f définie par :

$$A = Mat_{(i,j,k)}(f) = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est orthogonale, que dire de f ?.

${}^tAA = Id$ donc A est orthogonale et f est une isométrie de $E = \mathbb{R}^3$

2. Montrer que f est une rotation,

- **det A= 1** Donc f isométrie directe (donc rotation)
- f est une **rotation par rapport à une droite vectorielle $\vec{D}$.**
  - $\vec{D}$ est l'ensemble des invariants de f, déterminée par résolution de AX=X.

$$\vec{D} = SEP(A,1) = Vect\left\{\frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}\right\} = Vect(I), \qquad \text{vecteur normé}$$

  - L'angle t est déterminé par :
    - $\mathrm{tr}(A) = 1 + 2\cos t = -\frac{2}{3}$, donc $\boxed{t = \pm Arccos\left(\frac{-5}{6}\right)\ [2\pi]}$
    - sin t est du signe du produit mixte $[i, f(i), u] = \det_{(i,j,k)}\ (i, f(i), u)$
      on a $\vec{\imath}$ non colinéaire à u , et u le vecteur normé dirigeant et orientant l'axe $\vec{D}$

$$\det_{(i,j,k)}\ (i, f(i), u) = \frac{1}{3\sqrt{11}}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{vmatrix} = \frac{5}{3\sqrt{11}} > 0$$

Donc f est bien une rotation d'axe dirigé et orienté par $\boxed{I = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}}$ et d'angle $\boxed{\theta = Arccos\left(\frac{-5}{6}\right)\ [2\pi]}$

3. Soit P un plan dont u est un vecteur normal, Déterminer une base orthonormée $(v_1; v_2)$ de P.

- On a facilement $\boxed{\vec{\boldsymbol{P}} = \left\{X\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\ tel\ que\ \ x+y+3z=0\right\}}$
- $\vec{\boldsymbol{P}} = \left\{X\begin{pmatrix}-y-3z\\y\\z\end{pmatrix} = y\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix} + z\begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}; (y;z) \in \mathbb{R}^2\right\}$ soit : $\boxed{\vec{\boldsymbol{P}} = Vect\left\{\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}\right\} = Vect(f_1; f_2)}$
- Il faut ensuite othonormer la base de P avec l'algorithme de Gram-Schmidt.
  - $v_1 = \frac{f_1}{\|f_1\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}}$
  - $y_2 = f_2 - \langle f_2, v_1 \rangle\ v_1 = \begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}$
  - $v_2 = \frac{y_2}{\|y_2\|} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{22}}\begin{pmatrix}-\frac{3}{2}\\-\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}}$

<u>Exercice 3</u> : Diagonalisation. (6 points)

Soit $\mathrm{E} = \mathbb{R}^3$ un espace euclidien de base canonique $B = (i, j, k)$, et S la matrice dans la base B d'un endomorphisme g définie par :

$$S = Mat_{(i,j,k)}(g) = \begin{pmatrix}3 & -1 & -1\\-1 & 2 & 0\\-1 & 0 & 2\end{pmatrix}$$

1. Expliquer pourquoi la matrice S est diagonalisable et dans quel type de base.

   La matrice S est symétrique réelle donc diagonalisable dans une BON.

2. Montrer que S peut s'écrire sous la forme , $S = PDP^{-1}$, avec P orthogonale et D matrice diagonale.
   - $\chi_S(x) = -(x-1)(x-2)(x-4)$
   - $Sp_{\mathbb{R}}(S) = \{1; 2; 4\}$
   - $SEP(S,1) = Vect\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ on prend $v1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$
   - $SEP(S,2) = Vect\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$ on prend $v2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\-1\\1\end{pmatrix}$
   - $SEP(S,4) = Vect\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$ on prend $v2 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}$
   - S diagonalisable, $S = PDP^{-1}$, avec P orthogonale,

$$P = (v1, v2, v3) \quad \text{Et} \quad D = \begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 2 & 0\\0 & 0 & 4\end{pmatrix}$$