

Interrogation de T.D. n°4 : IPSA. Maths Spé

Algèbre linéaire : Isométries et diagonalisation

Durée : 1 heure.

Exercice 1 : Question de cours. (4 points)

1. Donner la définition du produit scalaire d'un espace euclidien.
2. Démontrer que les valeurs propres d'une isométrie d'un espace euclidien sont de module 1.

Exercice 2 : Isométries de \mathbb{R}^3 . (1+5+4+1+1=13 points)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ un espace euclidien de base canonique $B = (i, j, k)$, et A la matrice dans la base B d'un endomorphisme f définie par :

$$A = \text{Mat}_{(i,j,k)}(f) = \frac{-1}{9} \begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que A est orthogonale, que dire de f ?
2. Montrer que f est la réflexion par rapport au plan P d'équation : $x + 4y + z = 0$
3. Déterminer une base orthonormée $(v_1; v_2)$ de P .
4. Donner un vecteur normé (u) , normal à P .
5. Ecrire alors la matrice de f dans la base $B' = (u; v_1; v_2)$.

Exercice 3 : Diagonalisation. (6 points)

Soit $E = \mathbb{R}^3$ un espace euclidien de base canonique $B = (i, j, k)$, et S la matrice dans la base B d'un endomorphisme g définie par :

$$S = \text{Mat}_{(i,j,k)}(g) = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -2 \\ -2 & 8 & -2 \\ -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

1. Expliquer pourquoi la matrice S est diagonalisable et dans quel type de base.
2. Montrer que S peut s'écrire sous la forme $S = PDP^{-1}$, avec P orthogonale et D matrice diagonale. Déterminer P, D et P^{-1}