Corrigé du partiel du 15 janvier 2007 - Aérospé

Exercice 1 On considère la courbe paramétrée par $M(t) = (3\cos t, t + \sin t)$.
a) Montrer en étudiant $M(-t)$ et $M(t+2\pi)$ que la courbe est invariante par une symétrie et une translation. Justifier que l'on peut se limiter à une étude sur $[0, \pi]$.
b) Déterminer pour les valeurs $0, \frac{\pi}{2}, \pi$ de t la direction de la tangente au point de la courbe. Dire pour chacun de ces points s'il est un point de rebroussement, d'inflexion ou d'allure normale.
c) Dresser le tableau de variation sur l'intervalle d'étude de la courbe.
d) Réaliser un tracé de la courbe faisant apparaître au moins la portion de courbe pour t variant entre $-\pi$ et 3π. On représentera notamment les tangentes calculées à la question b. *(N'hésitez pas à utiliser une page entière pour ce tracé)*

Corrigé 1
a) Notons $M(t) = (x(t), y(t))$

$$M(t+2\pi) = (3\cos t, t + 2\pi + \sin t) = (x(t), y(t) + 2\pi)$$

Ainsi, $M(t+2\pi)$ se déduit de $M(t)$ par une translation de vecteur $2\pi\vec{j}$. On peut donc restreindre l'étude à $[-\pi, \pi]$

$$M(-t) = (3\cos t, -t - \sin t) = (x(t), -y(t))$$

Ainsi, $M(-t)$ se déduit de $M(t)$ par une symétrie d'axe (Ox). On peut donc restreindre l'étude à $[0, \pi]$

b)
$$M'(t) = (x'(t), y'(t)) = (-3\sin t, 1 + \cos t)$$

$$M''(t) = (-3\cos t, -\sin t)$$

$$M'(0) = (0, 2) \text{ et } M''(0) = (-3, 0)$$

En 0, la tangente est verticale (puisque dirigé par $M'(0)$) et 0 est un point d'allure normale (en effet, le point est birégulier puisque $M'(0)$ et $M''(0)$ ne sont pas colinéaires).

$$M'(\frac{\pi}{2}) = (-3, 1) \text{ et } M''(\frac{\pi}{2}) = (0, -1)$$

En $\frac{\pi}{2}$, la tangente est dirigée par $(-3, 1)$ et $\frac{\pi}{2}$ est un point d'allure normale.

$$M'(\pi) = (0, 0)$$

Le premier vecteur derivé est nul : il ne permet pas d'obtenir la direction de la tangente. Les dérivées suivantes sont :

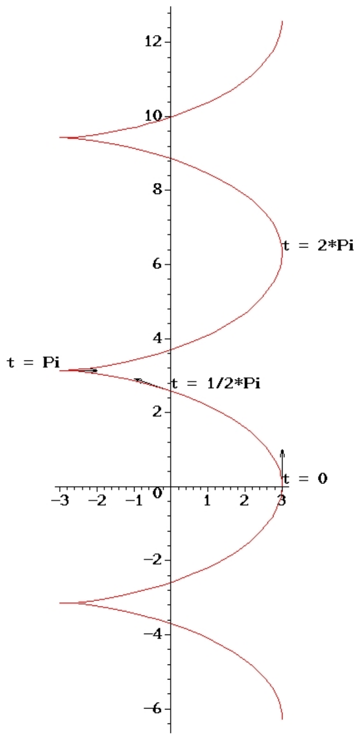
$$M''(\pi) = (3, 0) \text{ et } M^{(3)}(\pi) = (0, 1)$$

En π, la tangente est dirigée par $(3, 0)$ et π est un point de rebroussement de première espèce (on a les entiers caractéristiques $p = 2$ et $q = 3$).

c)

x	0		π
x'	0	$-$	0
x	3	$\searrow$	-3
y	0	$\nearrow$	π
y'	2	$+$	0

d)



Exercice 2 On reprend la courbe paramétrée de l'exercice 1. On pose $A = M(0)$ et $B = M(2\pi)$. On considère S la surface délimitée par la portion de courbe entre A et B et le segment $[AB]$.
a) Enoncer avec précision le théorème de Green-Riemann.
b) Calculer l'aire de S.

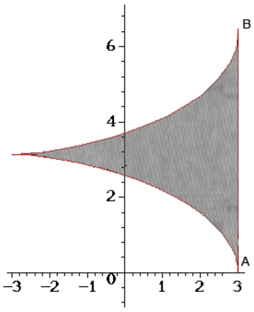
Corrigé 2
a) Théorème de Green-Riemann : Soit $S \subset \mathbb{R}^2$ une partie bornée dont le bord est un arc Γ orienté de manière à avoir S à gauche du sens de parcours. Soient P et Q deux fonctions C^1 d'un ouvert contenant S dans $\mathbb{R}$, alors :

$$\boxed{\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\Gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y}$$

b) Posons $Q = x$ et $P = 0$, et notons Γ le bord de S alors le théorème de Green-Riemann s'applique sur S et :

$$\iint_S 1\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_\Gamma x\,\mathrm{d}y$$

Γ est la réunion du segment $[AB]$ et de la portion de courbe entre A et B.



<u>Intégrale curviligne sur [AB] :</u>
Le segment [AB] peut être paramétré de A vers B (S à gauche) par : $(3,t), t \in [0,2\pi]$

$$\int_{[AB]} x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} 3\,\mathrm{d}t = 6\pi$$

<u>Intégrale curviligne sur la portion de courbe</u> (que l'on note $\widehat{AB}$) orientée de haut en bas (S à gauche) :

$$\begin{aligned}
\int_{\widehat{AB}} x\,\mathrm{d}y &= -\int_0^{2\pi} 3\cos t(1+\cos t)\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_0^{2\pi} 3(\cos t + \cos^2 t)\,\mathrm{d}t = -3\int_0^{2\pi} \cos t\,\mathrm{d}t - 3\int_0^{2\pi} \cos^2 t\,\mathrm{d}t \\
&= -3\,[\sin t]_0^{2\pi} - 3\int_0^{2\pi} \frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t \\
&= -3\left[\frac{t}{2} + \frac{\sin 2t}{4}\right]_0^{2\pi} = -3\pi
\end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{Aire(S) = 6\pi - 3\pi = 3\pi}$$

Exercice 3 Soit V le volume défini par les conditions $0 \leq x \leq y$, $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ et $0 \leq z$.
a) Déterminer le volume de V. On pourra utiliser le système de coordonnées sphériques.
b) Calculer $\iiint_V (x-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

Corrigé 3
a) Plaçons nous en coordonnées sphériques, où l'on note θ l'angle $(\vec{\imath}, \overrightarrow{OM'})$ où M' est le projeté de M sur (xOy) et ϕ l'angle $(\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM})$ (qui est donc compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $\frac{\pi}{2}$).
Le changement de variables donne :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\cos\phi \\ z = r\sin\phi \end{cases}$$

Traduisons les conditions sur V (compatible avec l'application du théorème de Fubini) :
– La condition $0 \leq x \leq y$ se traduit $\theta \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$. En effet dans le plan (xOy), le point M' est dans le premier quadrant (car $x \geq 0$ et $y \geq 0$) et au-dessus de la droite $y = x$.
– La condition $x^2+y^2+z^2 \leq 4$ équivaut à $0 \leq r \leq 2$
– On a aussi, comme $z \geq 0$, $\phi \in [0, \frac{\pi}{2}]$ (en effet, le point M est situé au-dessus du plan (xOy), «l'équateur» : sa «latitude» est positive).

Le changement de variables donne :

$$\left\{\begin{array}{l} x = r\cos\theta\cos\phi \\ y = r\sin\theta\cos\phi \\ z = r\sin\phi \end{array}\right.$$

Or le jacobien est égal à $r^2\cos\phi$. En effet :

$$J = det(\begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial \phi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial \phi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial \phi} \end{pmatrix}) = \begin{vmatrix} \cos\phi\cos\theta & -r\cos\phi\sin\theta & -r\sin\phi\cos\theta \\ \cos\phi\sin\theta & r\sin\phi\cos\theta & -r\sin\phi\sin\theta \\ \sin\phi & 0 & r\cos\phi \end{vmatrix} = r^2\cos\phi$$

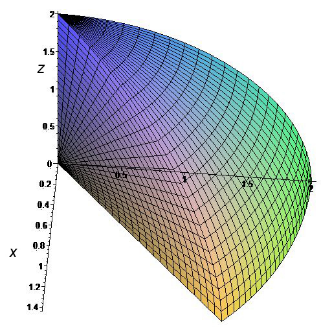
Finalement :

$$\begin{aligned} \text{Volume}(V) &= \iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^2 r^2\cos\phi\,\mathrm{d}r\right)\mathrm{d}\phi\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\cos\phi d\phi\right)\mathrm{d}\theta = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8}{3}\,\mathrm{d}\theta = \frac{8\pi}{12} \end{aligned}$$

$$\boxed{\text{Volume}(V) = \frac{2\pi}{3}}$$

Remarque : on retrouve ce résultat en remarquant qu'il faut deux fois V pour obtenir la sphère de rayon 2 intersectée avec le quadrant x, y, z positifs et donc 16 fois V pour obtenir la sphère entière, donc :

$$\text{Volume}(V) = \frac{1}{16}\text{Volume(S)} = \frac{1}{16}\frac{4}{3}\pi 2^3 = \frac{2\pi}{3}$$



b) La description de V a été donnée au a. On a donc :

$$\begin{aligned}
\iiint_V (x-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 (r\cos\theta\cos\phi - r\sin\phi)\, r^2 \cos\phi \,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\phi \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^2 r^3 \,\mathrm{d}r \right) (\cos\theta\cos\phi - \sin\phi)\cos\phi \,\mathrm{d}\phi \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 4\left(\cos\theta\cos^2\phi - \sin\phi\cos\phi\right) \mathrm{d}\phi \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\left(\cos\theta(1+\cos 2\phi) - \sin 2\phi\right) \mathrm{d}\phi \right) \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \Big[\cos\theta(2\phi + \sin 2\phi) + \cos 2\phi \Big]_{\phi=0}^{\phi=\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \\
&= \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} ((\cos\theta)(\pi) - 2)\ \mathrm{d}\theta = [\pi\sin\theta - 2\theta]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = (\pi-\pi) - \left(\pi\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\pi}{2} \right)
\end{aligned}$$

$$\boxed{\iiint_V (x-z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = -\frac{\pi}{2}\left(\sqrt{2}-1\right)}$$

Exercice 4 B est une boule de rayon R.
On considère P un plan qui «coupe» la boule en deux régions. On note h la distance du centre de la boule à P. Déterminer le volume des deux régions de B délimitées par P.

Corrigé 4
Choisissons un repère tel que O soit le centre de B et tel que P soit d'équation $z = h$ (c'est-à-dire que P est parallèle à (xOy)). On a évidemment $h \leq R$.
Décrivons la région supérieure de la boule en coordonnées cylindriques ($x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ se traduisant $r^2 + z^2 \leq R^2$) :

$$\begin{cases} \theta \in [0, 2\pi] \\ 0 \leq r \leq \sqrt{R^2 - z^2} \\ z \in [h, R] \end{cases}$$

Calculons le volume

$$\begin{aligned}
Volume(B_{sup}) &= \iiint_{B_{sup}} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \iiint_{B_{sup}} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z = \int_h^R \left(\int_0^{2\pi} \left(\int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} r\,\mathrm{d}r \right) \mathrm{d}\theta \right) \mathrm{d}z \\
&= \int_h^R \left(2\pi \left[\frac{r^2}{2} \right]_{r=0}^{r=\sqrt{R^2-z^2}} \right) \mathrm{d}z = \int_h^R \pi(R^2 - z^2)\,\mathrm{d}z \\
&= \pi \left[R^2 z - \frac{z^3}{3} \right]_{z=h}^{z=R} = \pi \left(2\frac{R^3}{3} - (R^2 h - \frac{h^3}{3}) \right) \\
&= \frac{\pi}{3}\left(2R^3 - 3hR^2 + h^3\right)
\end{aligned}$$

Si $h = -R$, on retrouve le volume de la boule : $\frac{4}{3}\pi R^3$ et si $h = R$, on a bien un volume nul. Pour $h = 0$, on retrouve $\frac{2}{3}\pi R^3$, le volume de la demi-boule.

On peut reprendre le raisonnement ci-dessus avec cette fois ci $z \in [-R, h]$, ou plus simplement remarquer que l'union (disjointe) des deux régions est la sphère et donc :

Puis :

$$\begin{aligned}\text{Volume}(B_{inf}) = \text{Volume}(B) - \text{Volume}(B_{sup}) &= \frac{4\pi}{3}R^3 - \frac{\pi}{3}\left(2R^3 - 3hR^2 + h^3\right)\\ &= \frac{\pi}{3}\left(2R^3 + 3hR^2 - h^3\right)\end{aligned}$$

Finalement :

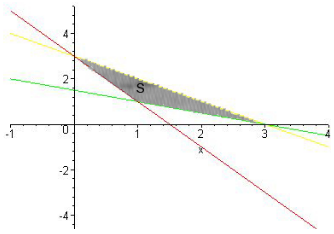
$$\boxed{\text{Volume}(B_{inf}) = \frac{\pi}{3}(2R^3 + 3R^2h - h^3)\ et\ \text{Volume}(B_{sup}) = \frac{\pi}{3}(2R^3 - 3R^2h + h^3)}$$

Exercice 5 Soit S la surface décrite par les trois inégalités :

$$\begin{cases} x + y \leq 3 \\ x + 2y \geq 3 \\ 2x + y \geq 3 \end{cases}$$

a) Représenter S.
b) Calculer $\iint_S x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y$.

Corrigé 5

a) 

b) L'intersection des deux droites délimitant inférieurement est donnée par :

$$(x + 2y = 3 \text{ et } 2x + y = 3) \Leftrightarrow (x = y = 1)$$

Notons S_1 la partie de S à gauche de $x = 1$ et S_2 celle à droite et donnons en des descriptions adaptées à l'application du théorème de Fubini.

$$\begin{aligned} S_1 &= \left\{(x,y)/0 \leq x \leq 1 \text{ et } 3 - 2x \leq y \leq 3 - x\right\} \\ S_2 &= \left\{(x,y)/1 \leq x \leq 3 \text{ et } \frac{3}{2} - \frac{x}{2} \leq y \leq 3 - x\right\} \end{aligned}$$

Ce qui nous permet de calculer l'intégrale demandée :

$$\begin{aligned} \iint_S x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y &= \iint_{S_1} x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y + \iint_{S_2} x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 \left(\int_{3-2x}^{3-x} \mathrm{d}y\right) x^2 \,\mathrm{d}x + \int_1^3 \left(\int_{\frac{3}{2}-\frac{x}{2}}^{3-x} \mathrm{d}y\right) x^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (3 - x - 3 + 2x) x^2 \,\mathrm{d}x + \int_1^3 (3 - x - \frac{3}{2} + \frac{x}{2}) x^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 x^3 \,\mathrm{d}x + \int_1^3 (\frac{3}{2} - \frac{x}{2}) x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{4} + \left[\frac{x^3}{2} - \frac{x^4}{8}\right]_1^3 \\ &= \frac{1}{4} + \frac{27}{2} - \frac{81}{8} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{13}{4} \end{aligned}$$

Finalement :

$$\boxed{\iint_S x^2 \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = \frac{13}{4}}$$