Chapitre 2 – Nombres Complexes – Exercices

I. Ciril, F. De Lepine, F. Duffaud, C. Peschard

Exercice 1
Mettre chacun des nombres complexes suivants sous la forme $a+ib$, $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

$$\frac{-2}{1-i\sqrt{3}},\ \frac{1}{(1+2i)(3-i)},\ \frac{1+2i}{1-2i},\ \frac{2+5i}{1-i}+\frac{2-5i}{1+i}.$$

Exercice 2
crire sous la forme $a+ib$ les nombres complexes suivants :

1. Nombre de module 2 et d'argument $\pi/3$.
2. Nombre de module 3 et d'argument $-\pi/8$.

Exercice 3
Représenter sous forme trigonométrique les nombres :

$$1+i \quad ; \quad 1+i\sqrt{3} \quad ; \quad \sqrt{3}+i \quad ; \quad \frac{1+i\sqrt{3}}{\sqrt{3}-i}.$$

Exercice 4

1. Mettre sous forme trigonométrique les nombres complexes suivants : $z_1 = 3+3i$, $z_2 = -1-\sqrt{3}i$, $z_3 = -\frac{4}{3}i$, $z_4 = -2$, $z_5 = e^{i\theta}+e^{2i\theta}$.
2. Calculer $(\frac{1+i\sqrt{3}}{2})^{2000}$.

Exercice 5
Écrire les nombres complexes suivants sous la forme $a+ib$ $(a,b \in \mathbb{R})$:

$$\frac{5+2i}{1-2i} \quad ; \quad \left(-\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^3 \quad ; \quad \frac{(1+i)^9}{(1-i)^7}.$$

Exercice 6
Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants :

$$z_1 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1+i} \quad ; \quad z_2 = 1+j \quad ; \quad z_3 = \frac{1+i\tan\theta}{1-i\tan\theta}.$$

Exercice 7
Calculer le module et l'argument des nombres complexes suivants, ainsi que de leurs conjugus :

1. $1+i(1+\sqrt{2})$.
2. $\sqrt{10+2\sqrt{5}}+i(1-\sqrt{5})$.

3. $\frac{\tan\varphi - i}{\tan\varphi + i}$ où φ est un angle donné.

Exercice 8
Écrire sous la forme partie réelle-partie imaginaire, puis sous la forme module-argument le nombre complexe :

$$\left(\frac{1+i-\sqrt{3}(1-i)}{1+i}\right)^2.$$

Exercice 9
Calculer le module et l'argument de $z = \frac{1}{1+i\tan\alpha}$.

Exercice 10
Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :

$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

Exercice 11*
Soient α et β deux nombres réels. Mettre le nombre complexe $z = e^{i\alpha} + e^{i\beta}$ sous forme trigonométrique $z = \rho e^{i\gamma}$ (indication : poser $u = \frac{\alpha+\beta}{2}$, $v = \frac{\alpha-\beta}{2}$).

En déduire la valeur de

$$\sum_{p=0}^{n} C_n^p \cos[p\alpha + (n-p)\beta].$$

Exercice 12*
Montrer que si $|z| \leq k < 1$ alors $1-k \leq |1+z| \leq 1+k$. Faire un dessin et montrer qu'il peut y avoir égalité.

Exercice 13*
Montrer algébriquement et géométriquement que si $|z| = 1$ alors $|1+z| \geq 1$ ou $|1+z^2| \geq 1$.

Exercice 14
Trouver les racines cubiques de $2-2i$ et de $11+2i$.

Exercice 15
Résoudre les équations suivantes :

$$z^6 = \frac{1+i\sqrt{3}}{1-i\sqrt{3}} \quad ; \quad z^4 = \frac{1-i}{1+i\sqrt{3}}.$$

Exercice 16
Calculer $\frac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire $\cos\frac{\pi}{12}$, $\sin\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{\pi}{12}$, $\tan\frac{5\pi}{12}$. Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation $z^{24} = 1$.

Exercice 17
Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$.

Exercice 18

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout nombre $z \in \mathbb{C}$, on a :

$$(z-1)\left(1+z+z^2+\ldots+z^{n-1}\right) = z^n - 1,$$

et en déduire que, si $z \neq 1$, on a :

$$1+z+z^2+\ldots+z^{n-1} = \frac{z^n-1}{z-1}.$$

2. Vérifier que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $\exp(ix) - 1 = 2i \exp\left(\frac{ix}{2}\right) \sin\left(\frac{x}{2}\right)$.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer pour tout $x \in \mathbb{R}$ la somme :

$$Z_n = 1 + \exp(ix) + \exp(2ix) + ... + \exp((n-1)ix),$$

et en déduire les valeurs de

$$\begin{aligned} X_n &= 1 + \cos(x) + \cos(2x) + ... + \cos((n-1)x) \\ Y_n &= \sin(x) + \sin(2x) + ... + \sin((n-1)x). \end{aligned}$$

Exercice 19

Trouver les racines carrées de $3 - 4i$ et de $24 - 10i$.

Exercice 20

1. Calculer les racines carrées de $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$. En déduire les valeurs de $\cos(\pi/8)$ et $\sin(\pi/8)$.
2. Calculer les valeurs de $\cos(\pi/12)$ et $\sin(\pi/12)$.

Exercice 21

Résoudre les équations suivantes, d'inconnue $z \in \mathbb{C}$:

1. $z^2 + z - 2 = 0$.
2. $z^2 - (5 - 14i)z - 2(5i + 12) = 0$.
3. $z + \overline{z} + j(z + 1) + 2 = 0$.
4. $\left(\frac{z+i}{z-i}\right)^3 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^2 + \left(\frac{z+i}{z-i}\right) + 1 = 0$.
5. $z^4 - (1 - i)z^2 - i = 0$.
6. $1 + 2z + 2z^2 + \ldots + 2z^{n-1} + z^n = 0, \quad n \in \mathbb{N}^*$.
7. $z^4 + 4z^3 + 6z^2 + 4z - 15 = 0$.

Exercice 22

1. Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - 2\cos(\alpha)z + 1 = 0$. En déduire la forme trigonométrique des solutions de l'équation :

$$z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1 = 0, \text{ où } n \text{ est un entier naturel non nul.}$$

$$P_\alpha(z) = z^{2n} - 2\cos(\alpha)z^n + 1.$$

(a) Justifier la factorisation suivante de P_α :

$$P_\alpha(z) = \left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n}\right) + 1\right)\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi}{n}\right) + 1\right)\ldots\left(z^2 - 2\cos\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2(n-1)\pi}{n}\right) + 1\right).$$

(b) Prouver, à l'aide des nombres complexes par exemple, la formule suivante :

$$1 - \cos\theta = 2\sin^2\left(\frac{\theta}{2}\right), \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

(c) Calculer $P_\alpha(1)$. En déduire

$$\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n}\right)\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{\pi}{n}\right)\ldots\sin^2\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{\sin^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{4^{n-1}}.$$

2. Pour tout α appartenant à $]0,\pi[$, et pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose :

$$H_n(\alpha) = \sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{\pi}{2n}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{2\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(\frac{\alpha}{2n} + \frac{(n-1)\pi}{n}\right).$$

   (a) Montrer que, pour tout α non nul, on a :

$$2^{n-1}H_n(\alpha) = \frac{\sin(\alpha/2)}{\sin(\alpha/2n)}.$$

   (b) Quelle est la limite de $H_n(\alpha)$ lorsque α tend vers 0 ?

   (c) En déduire que, pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a

$$\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)\ldots\sin\left(\frac{(n-1)\pi}{n}\right) = \frac{n}{2^{n-1}}.$$

Exercice 23
En utilisant les nombres complexes, calculer $\cos 5\theta$ et $\sin 5\theta$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.

Exercice 24

1. Soit $\theta \in \mathbb{R}$. A l'aide de la formule de Moivre exprimer en fonction de $\cos\theta$ et de $\sin\theta$:

   (a) $\cos(2\theta)$ et $\sin(2\theta)$.

   (b) $\cos(3\theta)$ et $\sin(3\theta)$. En déduire une équation du troisième degré admettant pour solution $\cos(\frac{\pi}{3})$ et la résoudre.
2. Linéariser les polynomes trigonométriques suivants : $1+\cos^2 x$, $\cos^3 x + 2\sin^2 x$.

Exercice 25
Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations et inéquations suivantes :

1. $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0$ puis $2\sin^2 x - 3\sin x - 2 > 0$.
2. $\sin(5x) = \sin\left(\frac{2\pi}{3} + x\right)$.
3. $\cos^2(x) - \sin^2(x) = \sin(3x)$.
4. $\cos(5x) + \cos(3x) \leq \cos(x)$.
5. $\cos^4(x) - \sin^4(x) = 1$.
6. $2\cos^2(x) - 9\cos(x) + 4 > 0$.

Exercice 26 Déterminer l'ensemble des nombres complexes z tels que :

1. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = 1$,
2. $\left|\dfrac{z-3}{z-5}\right| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Exercice 27

1. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que : $\overline{z}(z-1) = z^2(\overline{z}-1)$.

2. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que les images de 1, z, $1 + z^2$ soient alignées.
3. Déterminer l'ensemble des points M du plan complexe, d'affixe z tels que :

$$\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2.$$

Exercice 28
Soit $s = (1 - z)(1 - iz)$.

1. Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes z tel que s soit réel.
2. Déterminer l'ensemble des images des nombres complexes z tel que s soit imaginaire pur.

Exercice 29
Déterminer les nombres complexes z tels que le triangle ayant pour sommets les points d'affixes z, z^2, z^3 soit rectangle au point d'affixe z.

Exercice 30

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$(1) \quad \frac{z-2}{z-1} = i.$$

   On donnera la solution sous forme algébrique.
2. Soit M, A, et B les points d'affixes respectives $z, 1, 2$. On suppose que $M \neq A$ et que $M \neq B$. Interpréter géométriquement le module et un argument de $(z - 2)/(z - 1)$ et retrouver la solution de l'équation (1).

Exercice 31 Le plan P est rapporté à un repère orthonormé et on identifie P à l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$ par

$$M(x, y) \mapsto x + iy = z,$$

où z est appelé l'affixe de M. Soit $g : P \to P$ qui à tout point M d'affixe $z \neq -1$ associe $g(M)$ d'affixe $z' = \frac{1-z}{1+z}$.

1. Calculer $z' + \bar{z}'$ pour $|z| = 1$.
2. En déduire l'image du cercle de rayon 1 de centre 0 privé du point de coordonnées $(-1, 0)$ par l'application g.