TD 11 — Séries entières, séries de Fourier

Séries entières

Exercice 1 On considère les suites définies sur $\mathbb{N}$ par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \quad , \quad T_n = S_n + \frac{1}{n.n!}$$

a) Montrer que ces deux suites sont convergentes et donner leur limite.
b) Etudier la monotonie de ces deux suites.
c) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on a :

$$S_n < e < T_n$$

d) Montrer que $2,65 < e < 2,75$.
e) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $n.n!\, e \notin \mathbb{N}$
f) En déduire que e est irrationnel.

Exercice 2 Pour les séries entières suivantes, déterminer le rayon de convergence.

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^n$ $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^n+5}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(4^n-n+3)x^n$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sqrt{n}x^{2n}}{2^n+1}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n!}{(2n)!}x^n$ $\quad\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(\ln n)x^n$

$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}x^{(n^2)}$ $\quad\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(\sin\frac{n\pi}{6})x^n$ $\quad\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{4n+3}}{3^n+4}$

Exercice 3 On définit les fonctions suivantes par des séries entières :

$$f_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n \qquad f_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} nx^n \qquad f_3(x) = \sum_{n=0}^{\infty} n^2x^n$$

$$f_4(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)x^n \qquad f_5(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$$

a) Déterminer le rayon de convergence de ces séries entières.
b) Montrer que $f_1'(x) = f_4(x)$ et $f_4'(x) = f_5(x)$
c) Exprimer $f_4(x)$ à l'aide de $f_1(x)$ et $f_2(x)$
d) Exprimer $f_5(x)$ à l'aide de $f_1(x)$, $f_2(x)$ et $f_3(x)$
e) Sans série entière, expliciter $f_1(x)$.
f) En déduire des expressions de $f_4(x)$ puis de $f_5(x)$
g) En déduire des expressions de $f_2(x)$ et de $f_3(x)$
h) Montrer que la série numérique $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^2}{5^n}$ converge et calculer sa valeur.

Exercice 4 Déterminer un développement en série entière des fonctions suivantes (on précisera le rayon de convergence).

$\displaystyle\frac{x}{x+1}$ $\quad e^x\cos x$ $\quad (1+x)\ln(1+x)$

$\displaystyle\frac{e^x-1-x}{x^2}$ $\quad (1-x^2)^{-2}$ $\quad \displaystyle\ln\frac{1+x}{2-x}$

$\displaystyle\frac{2x+3}{x^3-7x+6}$ $\quad \displaystyle\frac{1}{x^4+x^2+1}$ $\quad \displaystyle\frac{x^3+x+1}{3+4x^2}$

Exercice 5 Soit l'équation différentielle (E) : $y' + xy = 1$, d'inconnue la fonction y. On recherche la solution telle que $y(0) = 0$
a) On suppose que la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ est une solution de (E).
Montrer que les coefficients a_n doivent vérifier $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ et $a_{n+2} = -\frac{a_n}{n+2}$.
b) En déduire l'expression des coefficients a_n.
c) Vérifier que cette série entière est bien définie sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution de (E).

Exercice 6 On considère $a_n = \dfrac{(2n)!}{(n!)^2}$
a) Etablir que $(n+1)a_{n+1} = 2(2n+1)a_n$ pour tout n entier.
b) Déterminer le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$
c) Soit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Montrer que f est solution de l'équation différentielle

$$(E) : (1-4x)y' - 2y = 0$$

d) Résoudre l'équation différentielle (E).
e) En déduire l'expression de $f(x)$.

Exercice 7 Pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, on définit la série entière

$$f_k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^k x^n$$

a) Déterminer le rayon de convergence de la série entière f_k.
b) Que vaut $f_k(0)$?
c) Exprimer f_{k+1} en fonction de f_k'.
e) Déterminer f_0, f_1, f_2, f_{-1}, f_{-2}.

Exercice 8 a) Montrer que la série $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ converge. Est-elle absolument convergente ?
b) Déterminer, en utilisant une série entière, la valeur de la série S.
c) On note $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$. On considère la fonction f définie par la série entière :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n x^n$$

Déterminer le rayon de convergence de cette série entière.
d) En calculant d'abord $(1-x)f(x)$, expliciter la fonction $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles.

Exercice 9 Soit la série entière définie par

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(2n)!}$$

a) Déterminer le rayon de convergence de $f(x)$.
b) On pose les fonctions g et h définies par : $g(x) = f(x^2)$ et $h(x) = f(-x^2)$. Montrer que g et h sont des séries entières dont on précisera le rayon de convergence.
c) En déduire une expression de $f(x)$ à l'aide de fonctions usuelles (on pourra être amené à distinguer deux cas).
d) Calculer

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(4n)!}$$

Exercice 10 Soit $\alpha \in]0, \pi[$ un réel fixé.
On considère f la fonction 2π-périodique telle que $f(x) = \frac{\pi}{2}$ pour $x \in [-\alpha, \alpha]$ et $f(x) = 0$ pour $x \in]\alpha, 2\pi - \alpha[$.
a) Représenter la fonction f (avec $\alpha = \pi/4$), au moins sur $[-4\pi, 4\pi]$.
b) Calculer les coefficients de Fourier de f. Comment s'écrit la série de Fourier de f ?
c) La série de Fourier de f converge-t-elle ? Converge-t-elle vers $f(x)$?
d) Déterminer en fonction de α,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n\alpha}{n} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^2 n\alpha}{n^2}$$

Exercice 11 Soit f la fonction 2π-périodique et impaire telle que pour $x \in [0, \pi]$, $f(x) = x(\pi - x)$.
a) Représenter la fonction f.
b) Déterminer les coefficients de Fourier de f.
c) En déduire les valeurs des séries

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3}, \text{ et} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^6}$$

Exercice 12 Soit f la fonction 2π-périodique, définie sur $[-\pi, \pi]$ par $f(x) = x^2$.
a) Déterminer les coefficients de Fourier de f.
b) Déduire du développement de f en série de Fourier les valeurs des sommes :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$$

Exercice 13 Soit f une fonction 2π-périodique.
On appelle coefficients de Fourier «exponentiels» de f les nombres, définis pour $n \in \mathbb{Z}$,

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) e^{-inx} \, \mathrm{d}x$$

a) Etablir que $a_0 = c_0$ et que pour $n \in \mathbb{N}^\star$, on a

$$a_n = c_n + c_{-n}, \quad b_n = i(c_n - c_{-n})$$

b) Soit $a \in \mathbb{R}^\star$. On considére la fonction f 2π-périodique telle que sur $[0, 2\pi[$, $f(x) = e^{ax}$.
Déterminer les coefficents c_n.
c) En déduire les coefficients de Fourier a_n et b_n.
d) La série de Fourier de f est-elle convergente ?
e) Déterminer la valeur de

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2}$$