TD 2 — Dérivées partielles, différentielle, opérateurs différentiels

Exercice 1 Soit $a \in \mathbb{R}^3$. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^3$ par $f(x) = a \wedge x + 2x$.
a) Déterminer les dérivées partielles de f.
b) Soit $b \in \mathbb{R}^3$. Exprimer la différentielle de f en b, $d_b f$. Déterminer $\ker d_b f$.

Exercice 2 Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
a) On suppose que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$$

Démontrer que f est constante.
b) On suppose que les fonctions $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ sont constantes. Montrer qu'il existe trois réels α, β, γ tels que :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, f(x, y) = \alpha + \beta x + \gamma y$$

Exercice 3 Soit φ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, continûment dérivable. Soit f la fonction à deux variables définie par

$$f(x, y) = \varphi(x^2 + y^3 - 5)$$

Déterminer les dérivées partielles et la différentielle de f en un point quelconque (x, y).

Exercice 4 Pour les fonctions suivantes, déterminer, si cela a un sens, divergence, rotationnel, gradient.
- $f(x, y, z) = x^2 + 3xy$
- $f(x, y, z) = (2x, 3y, 4z)$
- $f(x, y, z) = (3x^2 + yz, x^2 + yz\cos x, 3)$
- $f(x, y, z) = (2x^2 + 5z, e^z, x^y)$
- $f(x, y, z) = (x^2 + zx, yz, 3 + \sin(xy + z^2))$

Exercice 5 Déterminer divergence et rotationnel, des fonctions suivantes définies sur $\mathbb{R}^3$ par :

1. $f(\vec{x}) = \alpha\vec{x}$ (α étant un réel constant).
2. $f(\vec{x}) = \frac{1}{||\vec{x}||}\,\vec{x}$
3. $f(\vec{x}) = \vec{a} \wedge \vec{x}$ ($\vec{a}$ étant un vecteur constant).

Exercice 6 Soit $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Soit

$$\vec{F}(x, y, z) = (\varphi(x + z), 0, 0)$$

Déterminer $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{F}$ et div $\vec{F}$.

Exercice 7 Soit $\vec{F}(x, y, z) = (x^2 + 3y, z^3 - 2y, 4x)$. Parmi les écritures suivantes, certaines ont un sens. Lesquelles ? Pour celles-ci, évaluez-les.

1. $\overrightarrow{\text{grad}}\ \vec{F}$
2. $\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{F}$

3. div $\vec{F}$
4. $\overrightarrow{\text{grad}}$ div $\vec{F}$
5. div div $\vec{F}$
6. div $\overrightarrow{\text{rot}}$ $\vec{F}$
7. $\overrightarrow{\text{rot}}$ $\overrightarrow{\text{rot}}$ $\vec{F}$
8. $\overrightarrow{\text{rot}}$ $\overrightarrow{\text{grad}}$ div $\vec{F}$

Exercice 8 Soit $\vec{a}$ un vecteur constant et $\vec{F}$ une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, qui est $\mathcal{C}^1$. Exprimer div $(\vec{a} \wedge \vec{F})$ en fonction de $\vec{a}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}$ $\vec{F}$.

Exercice 9 Soient $\vec{a}$ et $\vec{b}$ deux vecteurs constants de $\mathbb{R}^3$. On définit sur $\mathbb{R}^3$ la fonction f par

$$f(\vec{x}) = (\vec{x} \cdot \vec{a})\vec{b}$$

a) Exprimer divergence et rotationnel de f.
b) A quelle condition, la divergence est-elle nulle sur $\mathbb{R}^3$?
c) A quelle condition, le rotationnel est-il nul sur $\mathbb{R}^3$?

Exercice 10 Soit $\vec{F}$ et $\vec{G}$ deux applications de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$, de classe $\mathcal{C}^1$.
On note $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$.
a) On note

$$\left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{G} = F_1 \frac{\partial \vec{G}}{\partial x} + F_2 \frac{\partial \vec{G}}{\partial y} + F_3 \frac{\partial \vec{G}}{\partial z}$$

Justifier du point de vue du formalisme, ce qui motive cette notation.
b) Montrer que l'on peut identifier $\left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{G}$ à l'écriture matricielle $(J_G)F$, en notant J_G la jacobienne de G, et en identifiant $F(x, y, z)$ à la matrice colonne associée.
c) Expliciter les coordonnées de $\left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{G}$.
d) Démontrer la formule suivante :

$$\overrightarrow{\text{grad}}\ (\vec{F} \cdot \vec{G}) = \left(\vec{F} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{G} + \vec{F} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{G} + \left(\vec{G} \cdot \vec{\nabla}\right) \vec{F} + \vec{G} \wedge \overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{F}$$

Exercice 11 Soit $\vec{F}$ une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^3$, de classe $\mathcal{C}^1$.
On définit : $\vec{H}(\vec{u}) = \vec{F}(||\vec{u}||^2)$
Exprimer div $\vec{H}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}$ $\vec{H}$ à l'aide de $\vec{F}'(||\vec{u}||^2)$.

Exercice 12 Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
On suppose qu'en tout point, $\overrightarrow{\text{grad}}$ φ est colinéaire au vecteur $u = (1, 0)$.
a) Montrer qu'il existe une fonction ψ de classe $\mathcal{C}^1$, telle que $\varphi(x, y) = \psi(x)$.
b) Décrire les lignes de niveau de φ. Faire un schéma dans le cas où $\psi(t) = 3t + 2$.