# TD n°3 : CORRECTION PARTIELLE

## Correction des exercices 1, 4, 8 et 9.

**Exercice 1**.

1. $f(x,y) = x^y$ on a pour $x > 0$, f une fonction C².

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\,x^{y-1}}$ ; $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = x^y.\ln x}$ ; $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = (y^2 - y)\,x^{y-2}}$ ; $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = x^y.(\ln x)^2}$ ; $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = x^y.\left(\frac{1+y\ln x}{x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)}$

2. $f(x,y) = \frac{1}{(x+y+z+t)^2} = \frac{1}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^2}$ on a pour $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \neq 0$ f une fonction C².

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y) = \frac{-2}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^3}}$ ; $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\ \partial x_j}(x,y) = \frac{6}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^4}}$ ; (pour $i\ et\ j = 1,2,3,4$ )

3. $f(x,y,z) = \frac{x+y}{x+z}$ on a pour $x + z \neq 0$ , f une fonction C².

$\boxed{\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{z-y}{(x+z)^2}}$ ; $\boxed{\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \frac{1}{(x+z)}}$ ; $\boxed{\frac{\partial f}{\partial z}(x,y) = \frac{-x-y}{(x+z)^2}}$ ; $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) = \frac{2(y-z)}{(x+z)^3}}$ ; $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0}$ ; $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y) = \frac{2(x+y)}{(x+z)^3}}$

$\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x,y) = \frac{-1}{(x+z)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y)}$ ; $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x,y) = \frac{x+2y-z}{(x+z)^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x,y)}$ $\boxed{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y) = \frac{-1}{(x+z)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x,y)}$

---

**Exercice 4**. **EXTREMA LOCAUX**

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - (\mathrm{x} - \mathrm{y})^2$ . $f$ est clairement C² sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$
   - Points critiques.

     On a $\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = (4x^3 - 2x + 2y\ ;\ 4y^3 - 2y + 2x)}$ et les solutions de $\overrightarrow{grad}\, f = \vec{0}$ sont : $\boxed{O(0,0), A(1\,;-1)\ et\ B(-1\,;1)}$.

   - Pour A et B on trouve $\boxed{r = 10, s = 2\ et\ t = 10}$, soit $\boxed{s^2 - rt = 90 < 0\ et\ r > 0}$ donc $f(A) = -2 = f(B)$ sont des minima locaux.
     La surface S est localement au dessus des plans tangents en A et B.
   - En O on trouve $\boxed{r = -2, s = 2\ et\ t = -2}$, soit $\boxed{s^2 - rt = 0}$ . On ne peut pas conclure.
     Il faut étudier localement le signe de $f(x,y) - f(0,0)$ soit ici celui de $f(x,y)$ car $f(0,0) = 0$.
     - $f(x,x) = 2x^4 \geq 0$ donc quand x tend vers 0, f(x,x) tend vers f(0,0) et est positif.
     - $f(x,0) = x^2(x^2 - 1) \leq 0$ si x est dans [-1 ;1] donc quand x tend vers 0, $f(x,0)\ tend\ vers\ f(0,0)$ et est négatif.

     Il n'y a donc pas d'extremum en O.

---

2. $f(x,y) = x^2 + y^2 + x^3$ . $f$ est clairement C² sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$
   - Points critiques.

     On a $\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = (2x + 3x^2\ ;\ 2y)}$ et les solutions de $\overrightarrow{grad}\, f = \vec{0}$ sont : $\boxed{O(0,0), A(-\frac{2}{3}\ ;0)}$.

   - Pour O on trouve $\boxed{r = 2, s = 0\ et\ t = 2}$, soit $\boxed{s^2 - rt = -4 < 0\ et\ r > 0}$ donc $f(O) = 0$ est un minimum local strict.
     La surface S est localement au dessus du plan tangent en O.

     Pour A on trouve $\boxed{r = -2, s = 0\ et\ t = 2}$, soit $\boxed{s^2 - rt = 4 > 0}$
     Il n'y a donc pas d'extremum en A. On a un point selle (ou point col).

---

3. $f(x,y) = x^2 y + \ln(1 + y^2)$ . $f$ est clairement C² sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$ car $1 + y^2 \geq 1 > 0$
   - Points critiques.

     On a $\boxed{\overrightarrow{grad}\, f = (2xy\ ;\ x^2 + \frac{2y}{x^2+1})}$ et la solution de $\overrightarrow{grad}\, f = \vec{0}$ est : $\boxed{O(0,0)}$.

   - En O on trouve $\boxed{r = 0, s = 0}$, soit $\boxed{s^2 - rt = 0}$ . On ne peut pas conclure.
     Il faut étudier localement le signe de $f(x,y) - f(0,0)$ soit ici celui de $f(x,y)$ car $f(0,0) = 0$.
     - $f(0,x) = \ln(1 + x^2) \geq 0$ donc quand x tend vers 0, $f(0,x)\ tend\ vers\ f(0,0)$ et est positif.

- $f(x,x^3) = x^5 + \ln(1+x^6) = x^5 + o(x^5)\ pour\ x \to 0$
  Donc si $x\ tend\ vers\ 0^-\ (c.a.d\ x \leq 0)$, $f(x,x^3)\ tend\ vers\ f(0,0)$ et est négatif.

Il n'y a donc pas d'extremum en O.

4. $f(x,y) = (x-y)e^{xy}$ . $f$ est clairement C² sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   - <u>Points critiques</u>.

     On a $\boxed{\overrightarrow{grad}\ f = \left((-y^2+xy+1)e^{xy}\ ;\ (x^2-xy-1)e^{xy}\right)}$ et les solutions de $\overrightarrow{grad}\ f = \vec{0}$ sont : $\boxed{B(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), A(-\frac{\sqrt{2}}{2}\ ; \frac{\sqrt{2}}{2})}$.

   - Pour A et B on trouve $\boxed{r = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e^{-\frac{1}{2}}\ ,\ s = \frac{-3\sqrt{2}}{2}\ e^{-\frac{1}{2}}\ et\ t = \frac{\sqrt{2}}{2}\ e^{-\frac{1}{2}}}$, soit $\boxed{s^2 - rt = 4e^{-1} > 0}$.
     Il n'y a donc pas d'extremum en A et en B. On a deux points selles (ou points cols).

5. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy$ . $f$ est clairement C² sur l'ouvert $\mathbb{R}^2$.
   - <u>Points critiques</u>.

     On a $\boxed{\overrightarrow{grad}\ f = (4x^3 - 4y\ ;\ 4y^3 - 4x)}$ et les solutions de $\overrightarrow{grad}\ f = \vec{0}$ sont : $\boxed{O(0,0), A(1\ ;1)\ et\ B(-1\ ;-1)}$.

   - Pour A et B on trouve $\boxed{r = 12, s = -4\ et\ t = 12}$, soit $\boxed{s^2 - rt = -128 < 0\ et\ r > 0}$ donc $f(A) = -2 = f(B)$ sont des <u>minima locaux</u>. La surface S est localement au dessus des plans tangents en A et B.
   - Pour O on trouve $\boxed{r = 0, s = -4\ et\ t = 0}$, soit $\boxed{s^2 - rt = 16 > 0}$.
     Il n'y a donc pas d'extremum en O. On a un point selle (ou point col).

<u>**Autres exemples de recherche d'extrema locaux.**</u>

| | Points critiques | Extrema ou pas |
|---|---|---|
| $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{x^3}{4}$ | O(0 ;0) | $s^2 - rt = -3 < 0\ et\ r > 0 \Longrightarrow$ f admet un minimum local strict en O |
| | A(-2 ;1) | $s^2 - rt > 0 \Longrightarrow$ f n'admet pas d'extremum local en A |

| | Points critiques | Extrema ou pas |
|---|---|---|
| $f(x,y) = x^4 + y^4$ | O(0 ;0) | $s^2 - rt = 0 \Longrightarrow$ On ne peut conclure par le théorème.<br>Mais on montre que f admet en O un minimum local strict. |

| | |
|---|---|
| $f(x,y) = x^4 + y^3 + 2y\cos x + 5y$ | Pas de points critiques |

| | Points critiques | Extrema ou pas |
|---|---|---|
| $f(x,y) = x(3 - 4x^2 - 3y^2)$ | A(0 ;1) et B(0 ;-1) | $s^2 - rt = 36 > 0 \Longrightarrow$ f n'admet pas d'extremum local en A et B |
| | C( ½ ;0) et D(- ½ ; 0) | $s^2 - rt = -36 < 0\ et\ r > 0 \Longrightarrow$ f admet un minimum local strict en C et D |

**Exercice 8** Soit $f$ une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. On suppose $f$ de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'en tout point, les trois dérivées partielles de $f$ sont non nulles. On introduit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = 0\}$.
On suppose en outre qu'on peut, au moins au voisinage d'un point $(a,b,c) \in S$, définir trois applications $X, Y, Z$ à deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$(x,y,z) \in S \iff x = X(y,z) \iff y = Y(x,z) \iff z = Z(x,y)$$

a) Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 de $X, Y, Z$ en fonction de celles de $f$.
b) En déduire la formule suivante :

$$\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial x} = -1$$

---

a) **Calculons les $dp_1$ de X, Y et Z.** [Mon2p577]

On pose $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que $\phi(x,y,z) = (X(y,z); y; z)$ qui est clairement $C^1(\mathbb{R}^3)$.

Alors la matrice jacobienne de $\phi$ en M=(x,y,z) est $J_\phi(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(M) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(M) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial z}(M) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(M) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(M) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial z}(M) \\ \frac{\partial \Phi_3}{\partial x}(M) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial y}(M) & \frac{\partial \Phi_3}{\partial z}(M) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial X}{\partial y}(M) & \frac{\partial X}{\partial z}(M) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On écrit alors la composée $fo\phi$ qui donne $fo\phi(x,y,z) = f(X(y,z); y; z)$ puis la jacobienne de la composée :

$$\left(\frac{\partial fo\phi}{\partial x}(M) ; \frac{\partial fo\phi}{\partial y}(M); \frac{\partial fo\phi}{\partial z}(M)\right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M)) ; \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M)); \frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))\right) \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial X}{\partial y}(M) & \frac{\partial X}{\partial z}(M) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial fo\phi}{\partial x}(M) = 0 \\ \frac{\partial fo\phi}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M)) \times \frac{\partial X}{\partial y}(M) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M)) \\ \frac{\partial fo\phi}{\partial z}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M)) \times \frac{\partial X}{\partial z}(M) + \frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M)) \end{cases}}$$

Or sur un voisinage de A=(a,b,c), on a pour tout point M=(x,y,z) de ce voisinage, $f(X(y,z); y; z) = fo\phi(x,y,z) = 0$.
De ce fait, puisque par composition, $fo\phi$ est aussi $C^1$, elle est de différentielle nulle et ses dérivées partielles sont nulles aussi.

Pour tout point M=(x,y,z) de ce voisinage de A=(a,b,c) on a donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial fo\phi}{\partial x}(M) = 0 \\ \frac{\partial fo\phi}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M)) \times \frac{\partial X}{\partial y}(M) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M)) = 0 \\ \frac{\partial fo\phi}{\partial z}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M)) \times \frac{\partial X}{\partial z}(M) + \frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M)) = 0 \end{cases}$$

Or on sait que les dérivées partielles de f sont non nulles en tout point de $\mathbb{R}^3$ donc, pour tout point M=(x,y,z) de ce voisinage de A=(a,b,c) on a :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial X}{\partial y}(M) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))} \\ \frac{\partial X}{\partial z}(M) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))} \end{cases}}$$

On obtient les autres $dp_1$ par permutation circulaire :

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial Y}{\partial z}(M) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))} \\ \frac{\partial Y}{\partial x}(M) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))} \end{cases}} \text{ et } \boxed{\begin{cases} \frac{\partial Z}{\partial x}(M) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))} \\ \frac{\partial Z}{\partial y}(M) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))} \end{cases}}$$

b) On a alors immédiatement l'égalité cherchée :

$$\boxed{\frac{\partial X}{\partial y}(M) \times \frac{\partial Y}{\partial z}(M) \times \frac{\partial Z}{\partial x}(M) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))} \times \frac{-\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))} \times \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))} = -1}$$

**Exercice 9** Soit $f$ une fonction $C^3$ de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On définit $\varphi$ par $\varphi(t) = f(at,bt,ct)$. Exprimer à l'aide des dérivées partielles de $f$ les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de $\varphi$.

Posons $g(t) = (at,bt,ct)$ , une fonction $C^3$ de $\mathbb{R}$ $dans$ $\mathbb{R}^3$ .
On écrit alors la composée $fog$ qui donne $\varphi(t) = fog(t) = f(at,bt,ct)$ puis la jacobienne de la composée ce qui donne aisément :

$$(\varphi'(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(t))\,;\,\frac{\partial f}{\partial y}(g(t));\frac{\partial f}{\partial z}(g(t))\right) \times \begin{pmatrix}\frac{\partial g_1}{\partial t}(t)\\ \frac{\partial g_2}{\partial t}(t)\\ \frac{\partial g_3}{\partial t}(t)\end{pmatrix}$$

Soit

$$\boxed{\varphi'(t) = a \times \frac{\partial f}{\partial x}(at,bt,ct) + b \times \frac{\partial f}{\partial y}(at,bt,ct) + c \times \frac{\partial f}{\partial z}(at,bt,ct)}$$

Pour la dérivée seconde on itère le procédé, on obtient en posant $\mathrm{M} = (at,bt,ct)$

$$\varphi''(t) = a \times \frac{\partial}{\partial x}\left(a \times \frac{\partial f}{\partial x}(M) + b \times \frac{\partial f}{\partial y}(M) + c \times \frac{\partial f}{\partial z}(M)\right) + b \times \frac{\partial}{\partial y}\left(a \times \frac{\partial f}{\partial x}(M) + b \times \frac{\partial f}{\partial y}(M) + c \times \frac{\partial f}{\partial z}(M)\right)$$
$$+ c \times \frac{\partial}{\partial z}\left(a \times \frac{\partial f}{\partial x}(M) + b \times \frac{\partial f}{\partial y}(M) + c \times \frac{\partial f}{\partial z}(M)\right)$$

Soit en appliquant le théorème de Schwarz puisque f est $C^2$ (car $C^3$)

$$\boxed{\varphi''(t) = a^2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + b^2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) + c^2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M) + 2\left(ab\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) + ac\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(M) + bc\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(M)\right)}$$

Puis de même en appliquant le théorème de Schwarz puisque f est $C^3$

$$\boxed{\begin{gathered}\varphi'''(t) = a^3 \times \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(M) + b^3 \times \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(M) + c^3 \times \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(M) + \\ + 4\left(a^2 b\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(M) + ab^2\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(M) + b^2 c\frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}(M) + bc^2\frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y}(M) + a^2 c\frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(M) + ac^2\frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x}(M)\right)\end{gathered}}$$