

TD n°3 : CORRECTION PARTIELLE

Correction des exercices 1, 4, 8, 9 et 10.

Exercice 1.

1. $f(x, y) = x^y$ on a pour $x > 0$, f une fonction C^2 .

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = y x^{y-1} \right]; \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = x^y \cdot \ln x \right]; \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = (y^2 - y) x^{y-2} \right]; \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = x^y \cdot (\ln x)^2 \right];$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = x^y \cdot \left(\frac{1+y \ln x}{x} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \right]$$

2. $f(x, y) = \frac{1}{(x+y+z+t)^2} = \frac{1}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^2}$ on a pour $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \neq 0$ f une fonction C^2 .

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) = \frac{-2}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^3} \right]; \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x, y) = \frac{6}{(x_1+x_2+x_3+x_4)^4} \right]; \text{ (pour } i \text{ et } j = 1, 2, 3, 4)$$

3. $f(x, y, z) = \frac{x+y}{x+z}$ on a pour $x + z \neq 0$, f une fonction C^2 .

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{z-y}{(x+z)^2} \right]; \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{(x+z)} \right]; \left[\frac{\partial f}{\partial z}(x, y) = \frac{-x-y}{(x+z)^2} \right]; \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{2(y-z)}{(x+z)^3} \right]; \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) = 0 \right]; \left[\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y) = \frac{2(x+y)}{(x+z)^3} \right]$$

$$\left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{-1}{(x+z)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \right]; \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(x, y) = \frac{x+2y-z}{(x+z)^3} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}(x, y) \right]; \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y) = \frac{-1}{(x+z)^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}(x, y) \right]$$

Exercice 4. EXTREMA LOCAUX

1. $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$. f est clairement C^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^2

- Points critiques.

On a $\overrightarrow{\text{grad}} f = (4x^3 - 2x + 2y; 4y^3 - 2y + 2x)$ et les solutions de $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0}$ sont :

$$\left[O(0,0), A(1; -1) \text{ et } B(-1; 1) \right].$$

- Pour A et B on trouve $\left[r = 10, s = 2 \text{ et } t = 10 \right]$, soit $\left[s^2 - rt = 90 < 0 \text{ et } r > 0 \right]$ donc $f(A) = -2 = f(B)$ sont des minima locaux.

La surface S est localement au dessus des plans tangents en A et B.

- En O on trouve $\left[r = -2, s = 2 \text{ et } t = -2 \right]$, soit $\left[s^2 - rt = 0 \right]$. On ne peut pas conclure.

Il faut étudier localement le signe de $f(x, y) - f(0,0)$ soit ici celui de $f(x, y)$ car $f(0,0) = 0$.

- $f(x, x) = 2x^4 \geq 0$ donc quand x tend vers 0, $f(x, x)$ tend vers $f(0,0)$ et est positif.
- $f(x, 0) = x^2(x^2 - 1) \leq 0$ si x est dans $[-1; 1]$ donc quand x tend vers 0, $f(x, 0)$ tend vers $f(0,0)$ et est négatif.

Il n'y a donc pas d'extremum en O.

2. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$. f est clairement C^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^2

- Points critiques.

On a $\overrightarrow{\text{grad}} f = (2x + 3x^2; 2y)$ et les solutions de $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0}$ sont : $O(0,0), A(-\frac{2}{3}; 0)$.

- Pour O on trouve $r = 2, s = 0$ et $t = 2$, soit $s^2 - rt = -4 < 0$ et $r > 0$ donc $f(O) = 0$ est un minimum local strict.

La surface S est localement au dessus du plan tangent en O.

Pour A on trouve $r = -2, s = 0$ et $t = 2$, soit $s^2 - rt = 4 > 0$

Il n'y a donc pas d'extremum en A. On a un point selle (ou point col).

3. $f(x, y) = x^2y + \ln(1 + y^2)$. f est clairement C^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 car $1 + y^2 \geq 1 > 0$

- Points critiques.

On a $\overrightarrow{\text{grad}} f = (2xy; x^2 + \frac{2y}{x^2+1})$ et la solution de $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0}$ est : $O(0,0)$.

- En O on trouve $r = 0, s = 0$, soit $s^2 - rt = 0$. On ne peut pas conclure.

Il faut étudier localement le signe de $f(x, y) - f(0,0)$ soit ici celui de $f(x, y)$ car $f(0,0) = 0$.

- $f(0, x) = \ln(1 + x^2) \geq 0$ donc quand x tend vers 0, $f(0, x)$ tend vers $f(0,0)$ et est positif.
- $f(x, x^3) = x^5 + \ln(1 + x^6) = x^5 + o(x^5)$ pour $x \rightarrow 0$
Donc si x tend vers 0^- (c. a. d $x \leq 0$), $f(x, x^3)$ tend vers $f(0,0)$ et est négatif.

Il n'y a donc pas d'extremum en O.

4. $f(x, y) = (x - y)e^{xy}$. f est clairement C^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 .

- Points critiques.

On a $\overrightarrow{\text{grad}} f = ((-y^2 + xy + 1)e^{xy}; (x^2 - xy - 1)e^{xy})$ et les solutions de $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0}$ sont :

$B(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}), A(-\frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{\sqrt{2}}{2})$.

- Pour A et B on trouve $r = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}, s = \frac{-3\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}$ et $t = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{1}{2}}$, soit $s^2 - rt = 4e^{-1} > 0$.

Il n'y a donc pas d'extremum en A et en B. On a deux points selles (ou points cols).

5. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$. f est clairement C^2 sur l'ouvert \mathbb{R}^2 .

- Points critiques.

On a $\overrightarrow{\text{grad}} f = (4x^3 - 4y; 4y^3 - 4x)$ et les solutions de $\overrightarrow{\text{grad}} f = \vec{0}$ sont :

$O(0,0), A(1; 1)$ et $B(-1; -1)$.

- Pour A et B on trouve $r = 12, s = -4$ et $t = 12$, soit $s^2 - rt = -128 < 0$ et $r > 0$ donc $f(A) = -2 = f(B)$ sont des minima locaux. La surface S est localement au dessus des plans tangents en A et B.

- Pour O on trouve $r = 0, s = -4$ et $t = 0$, soit $s^2 - rt = 16 > 0$.

Il n'y a donc pas d'extremum en O. On a un point selle (ou point col).

Autres exemples de recherche d'extrema locaux.

$f(x, y) = x^2 + xy + y^2 + \frac{x^3}{4}$	Points critiques	Extrema ou pas
	0(0 ;0)	$s^2 - rt = -3 < 0$ et $r > 0 \Rightarrow f$ admet un minimum local strict en 0
	A(-2 ;1)	$s^2 - rt > 0 \Rightarrow f$ n'admet pas d'extremum local en A

$f(x, y) = x^4 + y^4$	Points critiques	Extrema ou pas
	0(0 ;0)	$s^2 - rt = 0 \Rightarrow$ On ne peut conclure par le théorème. Mais on montre que f admet en 0 un minimum local strict.

$f(x, y) = x^4 + y^3 + 2y \cos x + 5y$	Pas de points critiques
--	-------------------------

$f(x, y) = x(3 - 4x^2 - 3y^2)$	Points critiques	Extrema ou pas
	A(0 ;1) et B(0 ;-1)	$s^2 - rt = 36 > 0 \Rightarrow f$ n'admet pas d'extremum local en A et B
	C(½ ;0) et D(-½ ;0)	$s^2 - rt = -36 < 0$ et $r > 0 \Rightarrow f$ admet un minimum local strict en C et D

Exercice 8 Soit f une fonction de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} . On suppose f de classe C^1 et qu'en tout point, les trois dérivées partielles de f sont non nulles. On introduit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, f(x, y, z) = 0\}$. On suppose en outre qu'on peut, au moins au voisinage d'un point $(a, b, c) \in S$, définir trois applications X, Y, Z à deux variables de classe C^1 telles que :

$$(x, y, z) \in S \iff x = X(y, z) \iff y = Y(x, z) \iff z = Z(x, y)$$

- a) Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 de X, Y, Z en fonction de celles de f .
- b) En déduire la formule suivante :

$$\frac{\partial X}{\partial y} \frac{\partial Y}{\partial z} \frac{\partial Z}{\partial x} = -1$$

a) **Calculons les dp₁ de X, Y et Z.**

On pose $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ telle que $\phi(x, y, z) = (X(y, z); y; z)$ qui est clairement $C^1(\mathbb{R}^3)$.

Alors la matrice jacobienne de ϕ en $M=(x,y,z)$ est $J_\phi(M) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x}(M) & \frac{\partial \phi_1}{\partial y}(M) & \frac{\partial \phi_1}{\partial z}(M) \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x}(M) & \frac{\partial \phi_2}{\partial y}(M) & \frac{\partial \phi_2}{\partial z}(M) \\ \frac{\partial \phi_3}{\partial x}(M) & \frac{\partial \phi_3}{\partial y}(M) & \frac{\partial \phi_3}{\partial z}(M) \end{pmatrix} =$

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial X}{\partial y}(M) & \frac{\partial X}{\partial z}(M) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On écrit alors la composée $f \circ \phi$ qui donne $f \circ \phi(x, y, z) = f(X(y, z); y; z)$ puis la jacobienne de la composée :

$$\left(\frac{\partial f \circ \phi}{\partial x}(M); \frac{\partial f \circ \phi}{\partial y}(M); \frac{\partial f \circ \phi}{\partial z}(M) \right) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M)); \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M)); \frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M)) \right) \times \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial X}{\partial y}(M) & \frac{\partial X}{\partial z}(M) \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Ce qui donne :

$$\begin{cases} \frac{\partial f \circ \phi}{\partial x}(M) = 0 \\ \frac{\partial f \circ \phi}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M)) \times \frac{\partial X}{\partial y}(M) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M)) \\ \frac{\partial f \circ \phi}{\partial z}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M)) \times \frac{\partial X}{\partial z}(M) + \frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M)) \end{cases}$$

Or sur un voisinage de $A=(a,b,c)$, on a pour tout point $M=(x,y,z)$ de ce voisinage, $f(X(y, z); y; z) = f \circ \phi(x, y, z) = 0$.

De ce fait, puisque par composition, $f \circ \phi$ est aussi C^1 , elle est de différentielle nulle et ses dérivées partielles sont nulles aussi.

Pour tout point $M=(x,y,z)$ de ce voisinage de $A=(a,b,c)$ on a donc :

$$\begin{cases} \frac{\partial f \circ \phi}{\partial x}(M) = 0 \\ \frac{\partial f \circ \phi}{\partial y}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M)) \times \frac{\partial X}{\partial y}(M) + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M)) = 0 \\ \frac{\partial f \circ \phi}{\partial z}(M) = \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M)) \times \frac{\partial X}{\partial z}(M) + \frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M)) = 0 \end{cases}$$

Or on sait que les dérivées partielles de f sont non nulles en tout point de \mathbb{R}^3 donc, pour tout point $M=(x,y,z)$ de ce voisinage de $A=(a,b,c)$ on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial X}{\partial y}(M) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))} \\ \frac{\partial X}{\partial z}(M) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))} \end{array} \right.$$

On obtient les autres dp_1 par permutation circulaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Y}{\partial z}(M) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))} \\ \frac{\partial Y}{\partial x}(M) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))} \end{array} \right. \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial Z}{\partial x}(M) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))} \\ \frac{\partial Z}{\partial y}(M) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))} \end{array} \right.$$

b) On a alors immédiatement l'égalité cherchée :

$$\frac{\partial X}{\partial y}(M) \times \frac{\partial Y}{\partial z}(M) \times \frac{\partial Z}{\partial x}(M) = \frac{-\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))} \times \frac{-\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial y}(\phi(M))} \times \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(\phi(M))}{\frac{\partial f}{\partial z}(\phi(M))} = -1$$

Exercice 9 Soit f une fonction C^3 de \mathbb{R}^3 dans \mathbb{R} . Soit $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$. On définit φ par $\varphi(t) = f(at, bt, ct)$. Exprimer à l'aide des dérivées partielles de f les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de φ .

Posons $(t) = (at, bt, ct)$, une fonction C^3 de \mathbb{R} dans \mathbb{R}^3 .

On écrit alors la composée $f \circ g$ qui donne $\varphi(t) = f \circ g(t) = f(at, bt, ct)$ puis la jacobienne de la composée ce qui donne aisément :

$$(\varphi'(t)) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(g(t)); \frac{\partial f}{\partial y}(g(t)); \frac{\partial f}{\partial z}(g(t)) \right) \times \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial g_2}{\partial t}(t) \\ \frac{\partial g_3}{\partial t}(t) \end{pmatrix}$$

Soit

$$\varphi'(t) = a \times \frac{\partial f}{\partial x}(at, bt, ct) + b \times \frac{\partial f}{\partial y}(at, bt, ct) + c \times \frac{\partial f}{\partial z}(at, bt, ct)$$

Pour la dérivée seconde on itère le procédé, on obtient en posant $M = (at, bt, ct)$

$$\begin{aligned} \varphi''(t) &= a \times \frac{\partial}{\partial x} \left(a \times \frac{\partial f}{\partial x}(M) + b \times \frac{\partial f}{\partial y}(M) + c \times \frac{\partial f}{\partial z}(M) \right) + b \\ &\quad \times \frac{\partial}{\partial y} \left(a \times \frac{\partial f}{\partial x}(M) + b \times \frac{\partial f}{\partial y}(M) + c \times \frac{\partial f}{\partial z}(M) \right) \\ &\quad + c \times \frac{\partial}{\partial z} \left(a \times \frac{\partial f}{\partial x}(M) + b \times \frac{\partial f}{\partial y}(M) + c \times \frac{\partial f}{\partial z}(M) \right) \end{aligned}$$

Soit en appliquant le théorème de Schwarz puisque f est C^2 (car C^3)

$$\varphi''(t) = a^2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(M) + b^2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(M) + c^2 \times \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(M) + 2 \left(ab \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(M) + ac \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(M) + bc \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(M) \right)$$

Puis de même en appliquant le théorème de Schwarz puisque f est C^3

$$\begin{aligned} \varphi'''(t) &= a^3 \times \frac{\partial^3 f}{\partial x^3}(M) + b^3 \times \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}(M) + c^3 \times \frac{\partial^3 f}{\partial z^3}(M) + \\ &+ 4 \left(a^2 b \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial y}(M) + a b^2 \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial x}(M) + b^2 c \frac{\partial^3 f}{\partial y^2 \partial z}(M) + b c^2 \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial y}(M) + a^2 c \frac{\partial^3 f}{\partial x^2 \partial z}(M) + a c^2 \frac{\partial^3 f}{\partial z^2 \partial x}(M) \right) \end{aligned}$$

Exercice 10.

On cherche les fonctions C^2 de \mathbb{R}^2 vérifiant : $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) : (E')$

Pour cela on utilise le changement de variables affine : $\Phi(x, y) = \left(\frac{x+y}{2}; \frac{x-y}{2}\right) = (u, v)$

Effectuer un changement de variable consiste à chercher une fonction $g : (u, v) \mapsto g(u, v)$ de classe C^2 sur \mathbb{R}^2 telle que la fonction composée $f = g \circ \Phi$ vérifie la condition donnée (E').

$$f = g \circ \Phi \quad \text{et donc :} \quad J_f(x, y) = J_g(\Phi(x, y)) \times J_\Phi(x, y)$$

On obtient l'égalité :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y); \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v); \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)\right) \times \begin{bmatrix} \frac{\partial \Phi_1}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Phi_1}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \Phi_2}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \Phi_2}{\partial y}(x, y) \end{bmatrix}$$

soit

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y); \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right) = \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v); \frac{\partial g}{\partial v}(u, v)\right) \times \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

d'où

$$(S): \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) - \frac{1}{2} \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \end{cases}$$

Il faut alors obtenir les dérivées partielles secondes de la fonction f (qui est C^2) en fonction de celles de g . Pour cela on va utiliser une petite astuce.

On interprète les égalités (S) de la façon suivante :

$$(S'): \begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \\ \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \right) \end{cases}$$

Alors en combinant (S) et (S') :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \right) = \frac{1}{4} \left(\frac{\partial}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial v} \right) \left(\frac{\partial g}{\partial u}(u, v) - \frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \right) \end{aligned}$$

On développe en utilisant la linéarité de l'opérateur dérivée partielle et le fait que la fonction f étant de classe C^2 , on peut appliquer le théorème de Schwarz :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) \right) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) \right)\end{aligned}$$

L'EDP (E') devient alors :

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) : (E') \\ \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) \right) &= \frac{1}{4} \left(\frac{\partial^2 g}{\partial u^2}(u, v) - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) + \frac{\partial^2 g}{\partial v^2}(u, v) \right)\end{aligned}$$

soit

$$\boxed{\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}(u, v) = 0 \quad (E_g)}$$

On sait que les fonctions g de classe C^2 vérifiant cette EDP (E_g) sont de la forme :

$$g(u, v) = H(v) + k(u) \quad \text{avec } H \text{ et } k \text{ de classe } C^2$$

Et donc les fonctions f de classe C^2 qui vérifient (E') sont de la forme :

$$\boxed{f(x, y) = H\left(\frac{x-y}{2}\right) + k\left(\frac{x+y}{2}\right)}$$

avec H et k , fonctions d'une seule variable de classe C^2