TD 3 - Dérivées d'ordre supérieur, recherche d'extrema, dérivation de composées

Exercice 1 Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 des fonctions définies par :

1. $f(x, y) = x^y$
2. $f(x, y, z, t) = \frac{1}{(x+y+z+t)^2}$
3. $f(x, y, z) = \dfrac{x + y}{x + z}$

Exercice 2 f est une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$, admettant des dérivées partielles du second ordre.
a) On suppose dans cette question que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0$ pour tous x et y dans $\mathbb{R}^2$. Justifier qu'il existe une fonction g définie sur $\mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = g(y)$.
b) On suppose dans cette question que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) = 0$ pour tous x et y dans $\mathbb{R}^2$. Que peut-on dire de f ?
c) On suppose que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = 0$ pour tous x et y dans $\mathbb{R}^2$. Que peut-on dire de f ?

Exercice 3 Soit n un entier ($n \geq 2$). Soit φ une fonction $\mathbb{R}_+^\star \to \mathbb{R}$, que l'on suppose de classe $\mathcal{C}^2$. Soit

$$f : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^n - \{0\} \to \mathbb{R} \\ \vec{x} \mapsto \varphi(||\vec{x}||^2) \end{array} \right.$$

a) Exprimer $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ pour i compris entre 1 et n.
b) Exprimer $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$ pour i compris entre 1 et n.
c) Exprimer Δf.
d) Montrer que $\Delta f = 0$ si et seulement si φ vérifie

$$n\varphi'(t) + 2t\varphi''(t) = 0$$

e) En déduire les fonctions φ telles que $\Delta f = 0$.

Exercice 4 Déterminer les extrema locaux des fonctions :

1. $f(x, y) = x^4 + y^4 - (x - y)^2$
2. $f(x, y) = x^2 + y^2 + x^3$
3. $g(x, y) = x^2 y + \ln(1 + y^2)$
4. $f(x, y) = (x - y)\mathrm{e}^{xy}$
5. $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4xy$

Exercice 5 On cherche à déterminer parmi les parallélépipèdes rectangle de surface donnée, celui qui a le plus grand volume.
a) Exprimer la surface et le volume d'un parallélépipède rectangle en fonction de ses trois dimensions (qu'on notera x, y, z).
b) On considère les seuls parallélépipèdes de surface S, un réel fixé positif. Montrer qu'on peut exprimer le volume comme fonction de x et y seulement : on notera $V(x, y)$ la fonction obtenue.
c) Déterminer le maximum de la fonction $V(x, y)$. Quelles sont les dimensions du parallélépipède correspondant à ce maximum ?

Exercice 6 A) φ est une fonction de $\mathbb{R}$ dans lui-même, de classe $\mathcal{C}^2$. Soit p la fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$p(x, y) = \varphi(2x + y^2)$$

Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de p à l'aide des dérivées d'ordre 1 et 2 de φ.
B) Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ dont on notera x et y les variables.
On définit $g(u,v) = f(\frac{u-v^2}{2}, v)$
a) Exprimer les dérivées partielles de g à l'aide de celles de f.
b) On suppose que pour tous $(x,y) \in \mathbb{R}^2$,

$$y\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$$

Montrer qu'il existe ψ une fonction à une variable telle que

$$f(x,y) = \psi(2x+y^2)$$

Exercice 7 Soit l'application $\Phi : \left\{ \begin{array}{l} \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \\ (\rho,\theta) \mapsto (\rho\cos\theta, \rho\sin\theta) \end{array} \right.$
a) Déterminer la jacobienne de Φ.
b) On introduit les fonctions $\vec{e_\rho}(\theta) = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\vec{e_\theta}(\theta) = (-\sin\theta, \cos\theta)$.
Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de Φ à l'aide de ces fonctions.
c) Soit A une fonction $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ dont on notera x et y les variables.
On définit $B = A \circ \Phi$. Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 de B à l'aide de celles de A, de ρ et de θ.
d) En déduire une expression de $\frac{\partial A}{\partial x}(\Phi(\rho,\theta))$ et $\frac{\partial A}{\partial y}(\Phi(\rho,\theta))$ en fonction de ρ, θ et des dérivées partielles de B.
e) En déduire une écriture de $\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, A$ en fonction des dérivées partielles de B, de ρ, θ, $\vec{e_\rho}$ et $\vec{e_\theta}$.

Exercice 8 Soit f une fonction de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. On suppose f de classe $\mathcal{C}^1$ et qu'en tout point, les trois dérivées partielles de f sont non nulles. On introduit $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3, f(x,y,z) = 0\}$.
On suppose en outre qu'on peut, au moins au voisinage d'un point $(a,b,c) \in S$, définir trois applications X, Y, Z à deux variables de classe $\mathcal{C}^1$ telles que :

$$(x,y,z) \in S \iff x = X(y,z) \iff y = Y(x,z) \iff z = Z(x,y)$$

a) Exprimer les dérivées partielles d'ordre 1 de X, Y, Z en fonction de celles de f.
b) En déduire la formule suivante :

$$\frac{\partial X}{\partial y}\frac{\partial Y}{\partial z}\frac{\partial Z}{\partial x} = -1$$

Exercice 9 Soit f une fonction C^3 de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}$. Soit $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$. On définit φ par $\varphi(t) = f(at,bt,ct)$.
Exprimer à l'aide des dérivées partielles de f les dérivées d'ordre 1, 2 et 3 de φ.

Exercice 10 Résoudre l'équation : $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ à l'aide du changement de variables $u = \frac{x+y}{2}$ et $v = \frac{x-y}{2}$ (on suppose que f est C^2).

Exercice 11
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, et $g(\rho,\theta) = f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$.
a) Calculer les dérivées partielles d'ordre 1 et 2 de g en fonction des dérivées partielles de f.
b) Calculer

$$\frac{\partial^2 g}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial g}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2}$$

Que reconnaît-on ?