

TD 5 - Intégration (suite), courbes paramétrées

Exercice 1 Soit Γ le chemin défini par $x(t) = \sin(2t)$, $y(t) = \cos(t)$ avec t variant de $-\frac{\pi}{2}$ à $\frac{\pi}{2}$.

- a) Faire une étude rapide de la courbe Γ , et justifier que c'est bien un chemin fermé. On appelle S la surface englobée par Γ .
- b) Déterminer l'aire de S .
- c) Déterminer $\iint_S x \, dx \, dy$

Exercice 2 Calculer l'aire de la portion de plan délimitée par la courbe d'équation paramétrique

$$\gamma(t) = (t - \sin t, 1 - \cos t)$$

(avec t variant de 0 à 2π) et l'axe des abscisses.

Exercice 3 Soit $A(2, 0)$ et $B(-2, 0)$, Γ_1 le demi-cercle supérieur de diamètre $[AB]$, Γ_2 le segment $[AB]$, ces deux chemins parcourus de A vers B . S la surface délimitée par Γ_1 et Γ_2 .

Soient

$$a = \int_{\Gamma_1} 4 \, dx + xy \, dy, \quad b = \int_{\Gamma_2} 4 \, dx + xy \, dy, \quad c = \iint_S y \, dx \, dy$$

- a) Calculer directement a , b , c .
- b) Justifier pourquoi $a = b + c$

Exercice 4 Calculer

$$\iiint_D z^{x^2+y^2} \, dx \, dy \, dz \quad \text{où } D = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq z \leq 1\}$$

Exercice 5 Soit $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \leq x, 0 \leq y, x^2 + y^2 + z^2 \leq 4\}$.

Calculer $\iiint_V xyz \, dx \, dy \, dz$.

Exercice 6 Soit V le volume défini par $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leq z \leq 1\}$.

- a) Calculer le volume de V .
- b) Calculer $\iiint_V x^2 z \, dx \, dy \, dz$

Exercice 7 On étudie la courbe définie par $\gamma(t) = (3t^2 - 1, t^3 - 3t)$.

- a) Déterminer d'éventuelles symétries de la courbe.
- b) Déterminer les points réguliers et biréguliers de la courbe.
- c) La courbe admet-elle des asymptotes ou des directions asymptotiques ?
- d) Après étude des variations, représenter la courbe.

Exercice 8 Après étude, représenter les courbes paramétrées par :

1. $\gamma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$
2. $\gamma(t) = (\operatorname{ch} t, \operatorname{sh} t)$
3. $\gamma(t) = \left(\frac{t^2}{1+t^2}, \frac{t^3}{1+t^2}\right)$
4. $\gamma(t) = (t^2 + t^4, t^2 - t^3)$
5. $\gamma(t) = (\cos t, \sin^3 t)$
6. $\gamma(t) = \left(2t + t^2, 2t - \frac{1}{t^2}\right)$
7. $x(t) = \frac{1+t^2}{1-3t^2}, y(t) = tx(t)$
8. $x(t) = \tan t, y(t) = \sin(2t)$
9. $\gamma(t) = (3 \cos t - \cos 3t, 3 \sin t - \sin 3t)$
10. $\gamma(t) = (\sin t, \cos^2 t (2 - \cos t))$