TD n°6 : CORRECTION

Courbes paramétrées. .

Exercice 1 Etudier les courbes décrites en polaires par

1. $r = \theta + \dfrac{1}{\theta}$
2. $r = \cos(4\theta) + 1$
3. $r = 2\sin\theta - 1$
4. $r = 2 + \sin 8\theta$

1. $\boldsymbol{\rho(\theta) = \theta + \frac{1}{\theta}}$

- $I = \mathbb{R}/\{0\}$
- ρ est impaire donc on passe de $M\big(\theta, \rho(\theta)\big)$ à $M\big(-\theta, \rho(-\theta)\big)$ par la symétrie par rapport la droite (Oy). On Prend donc θ dans]0 ; $+\infty$[puis on fait une symétrie / (Oy).
- $\boldsymbol{\rho(t) = t + \frac{1}{t} \neq 0}$
- <u>Variations</u>.

$$\boldsymbol{\rho'(t) = 1 - \frac{1}{t^2}} = \frac{t^2 - 1}{t^2}$$

t	0		1		$+\infty$
$\boldsymbol{\rho'(t)} = \dfrac{t^2-1}{t^2}$		-	0	+	1
$\boldsymbol{\rho(t) = t + \frac{1}{t}}$	$+\infty$	↘	2	↗	$+\infty$

- <u>Branches infinies.</u>
  - $\lim_{+\infty} \rho(\theta) = +\infty$ Γ présente une **branche-spirale**.
  - $\boldsymbol{\lim_{0^+} \rho(\theta) = +\infty}$

  on a : $\begin{cases} X(\theta) = \rho(\theta)\cos(\theta) \\ Y(\theta) = \rho(\theta)\sin(\theta) \end{cases}$ On a donc $\boxed{\lim_0 X(\theta) = +\infty}$

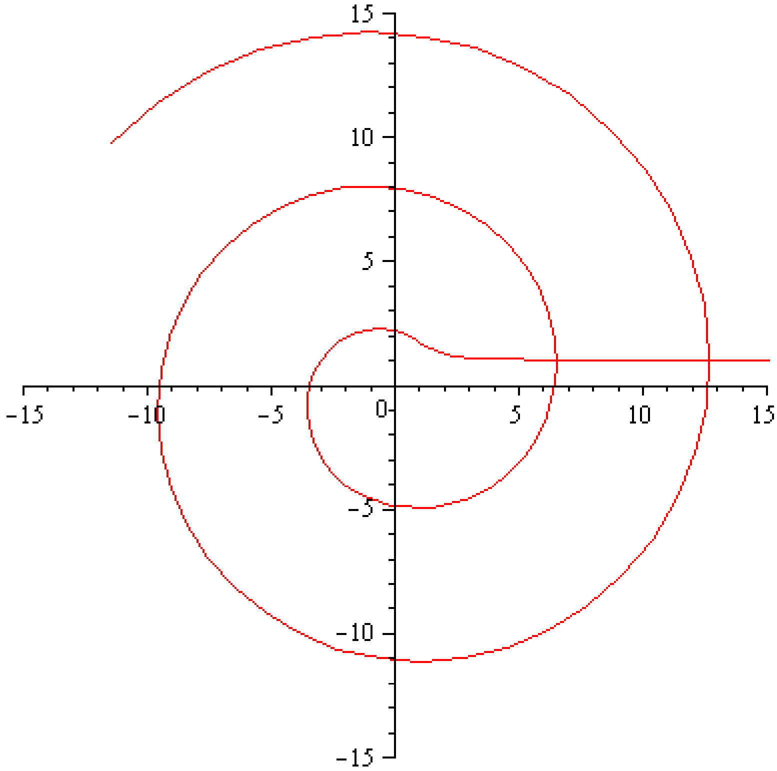
  $\lim_0 Y(t) = \lim_0 \left(t + \frac{1}{t}\right)\sin t = 1$, on fait un DL $\left(t + \frac{1}{t}\right)\sin t = \left(t + \frac{1}{t}\right)(t + o(t^2))$

  $\boldsymbol{\lim_0 Y(\theta) = 1}$, alors Γ admet pour **asymptote la droite $\boldsymbol{Y = 1}$ dans R.**

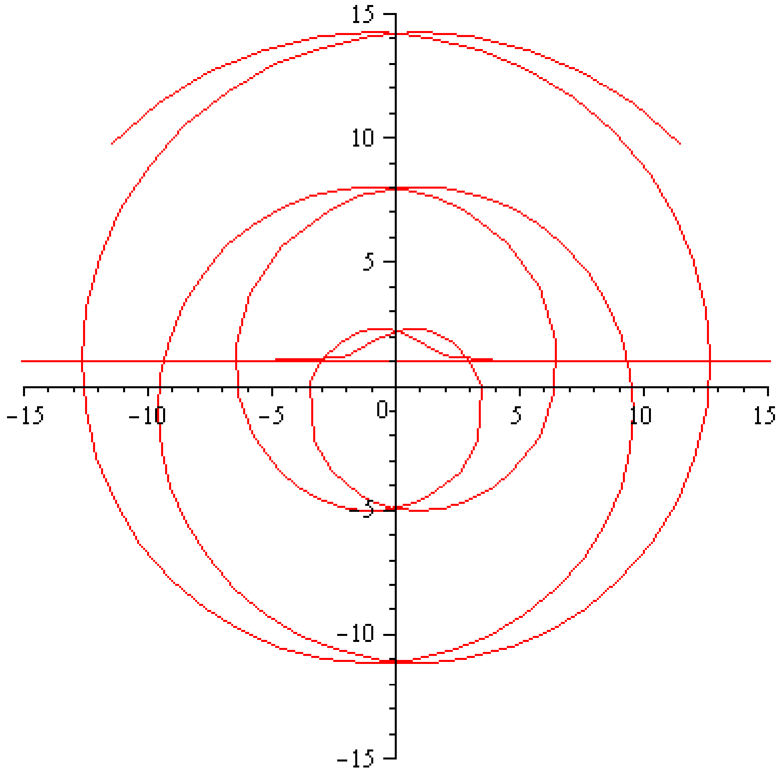
- <u>Etude en</u> **:** $\boldsymbol{M(1) = A[1, \rho(1)]}$

$$\mathrm{D(t)} = \det_{\vec{u},\vec{v}}\left(\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}, \frac{\overrightarrow{d^2M}}{dt^2}\right) = \rho^2(t) + 2\rho'^2(t) - \rho(t)\rho''(t) = \frac{t^6 + 4t^4 - 3t^2 - 2}{t^4}$$

donc $D(1) = 0$ et Γ présente **un point d'inflexion en $\boldsymbol{M(1) = A[1, \rho(1)]}$.**



Pour t de 0 à 15



Pour t de -15 à 15

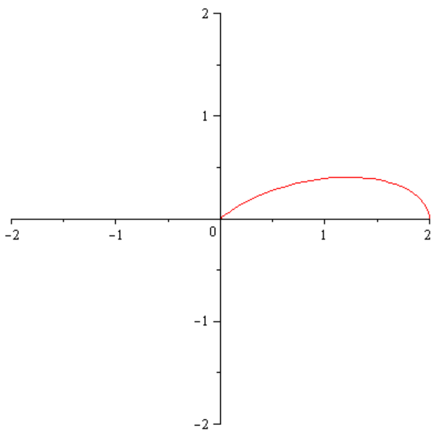
2. $\boldsymbol{\rho(\theta) = \cos 4\theta + 1}$

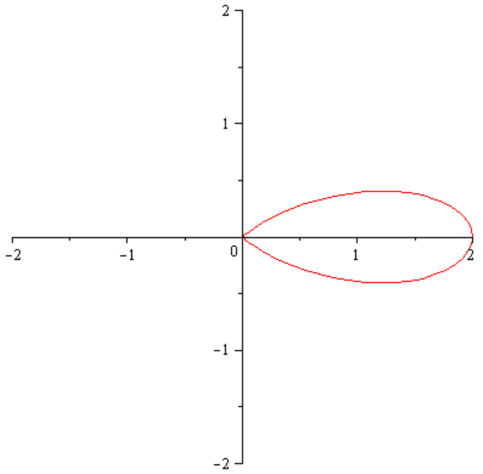
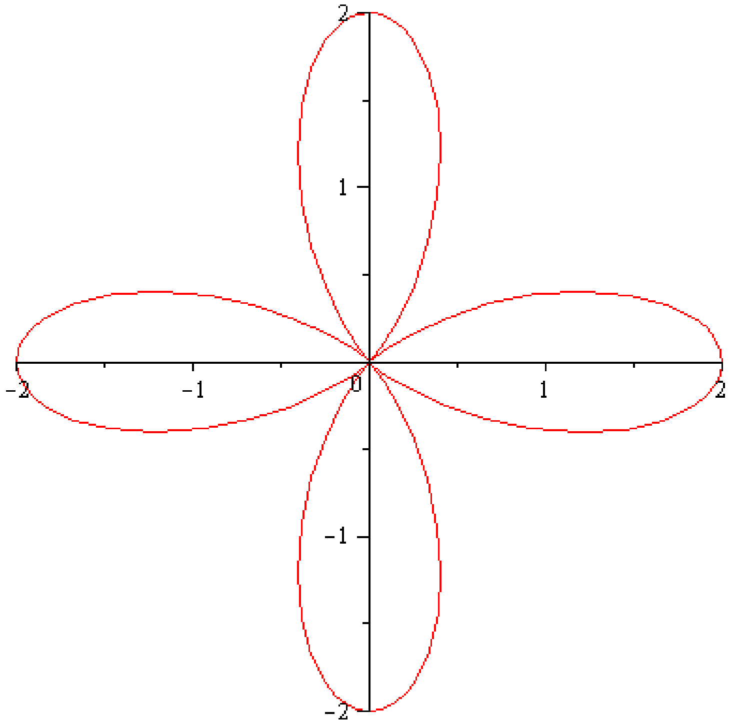
- ρ est $\frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ périodique donc étude sur $[-\frac{\pi}{4} ; \frac{\pi}{4}]$ puis rotations d'angles $\frac{\pi}{2}, 2 \times \frac{\pi}{2}$ et $3 \times \frac{\pi}{2}$
- ρ est paire, $\rho(-\theta) = \rho(\theta)$ on passe de $M(\theta, \rho(\theta))$ à $M(-\theta, \rho(-\theta))$ par la symétrie par rapport à (Ox). On Prend donc θ dans [O ;$\frac{\pi}{4}$] puis on fait une symétrie / (Ox).
- **Variations.**

$\rho'(\theta) = -4 \sin 4\theta$

t	0		$\frac{\pi}{4}$
$\rho'(\theta) = -4 \sin 4\theta$	0	-	0
$\boldsymbol{\rho(\theta) = \cos 4\theta + 1}$	2	$\searrow$	0

- **Tangentes en 0 et** $\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$
  - On a $M\left(\frac{\pi}{4}\right) = \boldsymbol{O(0;0)}$**.** Donc la tangent à la courbe au point $M\left(\frac{\pi}{4}\right)$ est la droite D(0 ;$\boldsymbol{\frac{\pi}{4}}$)**.**
  - $M(0) = A(2\cos 0\ ; 2\sin 0) = A(2;0)$.
    $\rho'(0) = -4 \sin 0 = 0$, donc $\tan V = \frac{\pi}{2}\ [\pi]$ où $V(\theta) = ((\widehat{\overrightarrow{OM}); \overrightarrow{T}(\theta)})$
    Donc on a une tangente verticale en A.

[O ;$\frac{\pi}{4}$]	

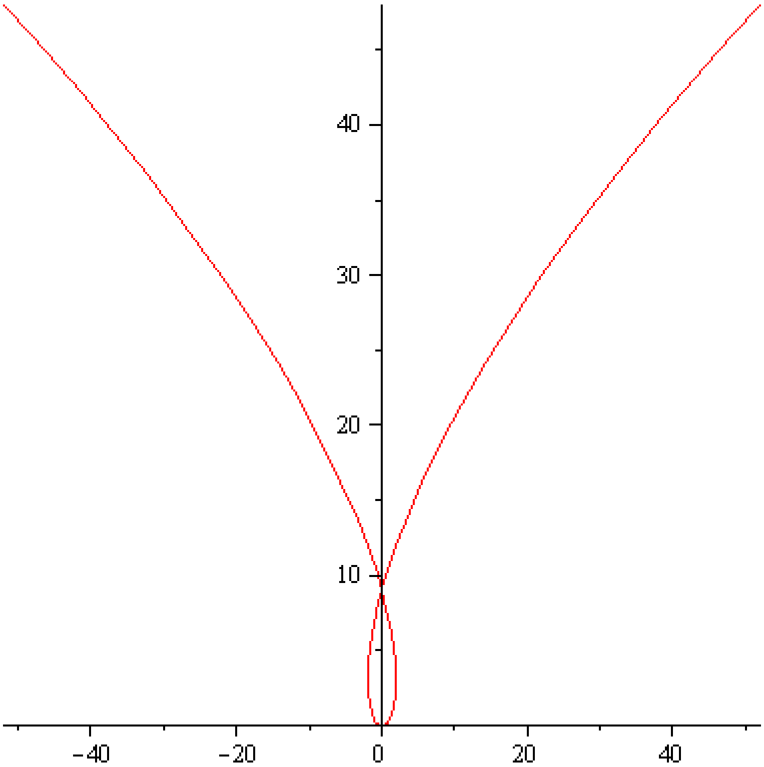
$[-\frac{\pi}{4};\frac{\pi}{4}]$	
Avec les 3 rotations (ou sur $[-\pi;\pi]$	

Exercice 2 On considère la courbe plane Γ de paramétrage $(3t - t^3, 3t^2)$
a) Après étude, représenter la courbe.
b) Déterminer l'abscisse curviligne s, les vecteurs de la base de Frenet $\vec{T}$, $\vec{N}$, et la courbure γ.
c) Déterminer la développée de Γ.

a)

- I=[0 ;+∞[et symétrie par rapport à (Oy) car $f(-t) = -f(t)$
- $\lim_{+\infty} \frac{y(t)}{x(t)} = 0$ donc branche parabolique de direction(Ox)

- **Tangente en M(0)=O(0 ;0).**
  $\overrightarrow{f'(t)} = (3 - 3t^2, 6t)$donc $\overrightarrow{f'(0)} = (3\,;0)$ dirige la tangente. (horizontale)
- **Points réguliers.**
  $y'(t) = 0 \; ssi \; t = 0$ or $x'(0) = 3 \neq 0$ donc tous les points sont réguliers puisque pour tous les réels t on a $\overrightarrow{f'(t)} \neq \vec{0}$



b)

Abscisse curviligne s.

$s'^2(t) = x'^2(t) + y'^2(t) = (3 - 3t^2)^2 + (6t)^2$ donc $\boxed{s'(t) = 3(t^2+1) = \left\|\overrightarrow{f'(t)}\right\|}$

$s(t) = \int_a^t \|f'(t)\|\, dt$ en prenant pour origine a=0, $\boxed{s(t) = x(x^2+3)}$

Vecteurs de la base de Frenet $\boxed{\mathcal{R}\left(M; \vec{T}, \vec{N}\right)}$ Tous les points sont réguliers donc pour tout réel t on a :

- $\boxed{\vec{T} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds}}$ donc $\boxed{\vec{T} = \frac{dt}{ds}\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \frac{1}{s'(t)}\left(x'(t)\,\vec{\imath} + y'(t)\,\vec{\jmath}\right)}$ soit ici

$$\boxed{\vec{T} = \frac{1}{(t^2+1)}\left[(1-t^2)\vec{\imath} + 2t\vec{\jmath}\right] = \frac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix}1-t^2\\ 2t\end{pmatrix}}$$

- $\boxed{\vec{N} = -\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\,\vec{\imath} + \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\,\vec{\jmath}}$ donc ici $\boxed{\vec{N} = \frac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} -2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix}}$

Calcul de la courbure . $\boxed{\boldsymbol{R(s) = \frac{ds}{d\varphi} = \frac{1}{\varphi'(s)} = \frac{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}{d\varphi}}}$ et $\boxed{\boldsymbol{\gamma(s) = \frac{1}{R}}}$

Méthode 1 : Application directe de la formule.

$$\boxed{R = \frac{\left\|\overrightarrow{f'(t)}\right\|^3}{\det(f',f'')} = \frac{\boldsymbol{3(t^2+1)^2}}{\boldsymbol{2}}} \text{ et donc } \boxed{\boldsymbol{\gamma(s) = \frac{1}{R} = \frac{2}{3(t^2+1)^2}}}$$

Méthode 2 : On utilise la formule de Frenet, $\boxed{\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{\vec{N}}{R}}$ on a $\boxed{s'(t) = 3(t^2+1) = ds/dt}$

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{d\vec{T}}{dt} \times \frac{1}{3(t^2+1)} = \frac{1}{(t^2+1)^2}\begin{pmatrix} -4t \\ 2(1-t^2) \end{pmatrix} \times \frac{1}{3(t^2+1)}$$

on a :

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{2}{3(t^2+1)^2}\,\frac{1}{t^2+1}\begin{pmatrix} -2t \\ 1-t^2 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{2}{3(t^2+1)^2}\,\vec{N}}$$

Donc : $\boxed{\boldsymbol{R = \frac{3(t^2+1)^2}{2}}}$ et $\boxed{\boldsymbol{\gamma(s) = \frac{1}{R} = \frac{2}{3(t^2+1)^2}}}$

c) Développée de la courbe $\boldsymbol{\Gamma}$. Notion étudiée par Monge en 1771

Posons : $d = \det(f',f'') = x'y'' - x''y'$ et $s'^2 = x'^2 + y'^2$.
L'équation générale de la développée d'une courbe plane (lieu des centres de courbure) :

$$\boxed{\begin{cases} X_C(t) = x - y'\dfrac{\left\|\overrightarrow{f'(t)}\right\|^2}{\det(f',f'')} = x - y'\dfrac{s'^2}{d} \\ Y_C(t) = y + x'\dfrac{\left\|\overrightarrow{f'(t)}\right\|^2}{\det(f',f'')} = y + x'\dfrac{s'^2}{d} \end{cases}}$$

ici : $d = \det(f',f'') = x'y - xy' = 18(t^2+1)$ et $s'^2 = x'^2 + y'^2 = 9(t^2+1)^2$

$$\boxed{\begin{cases} X(t) = -4t^3 \\ Y(t) = -\dfrac{3t^4}{2} + 3t^2 + 3/2 \end{cases}}$$

Exercice 3 Déterminer et représenter la développée des courbes suivantes :

1. L'hyperbole $y = \dfrac{1}{x}$
2. L'ellipse $x = a\cos t$, $y = b\sin t$
3. La spirale $\rho = e^{\theta}$

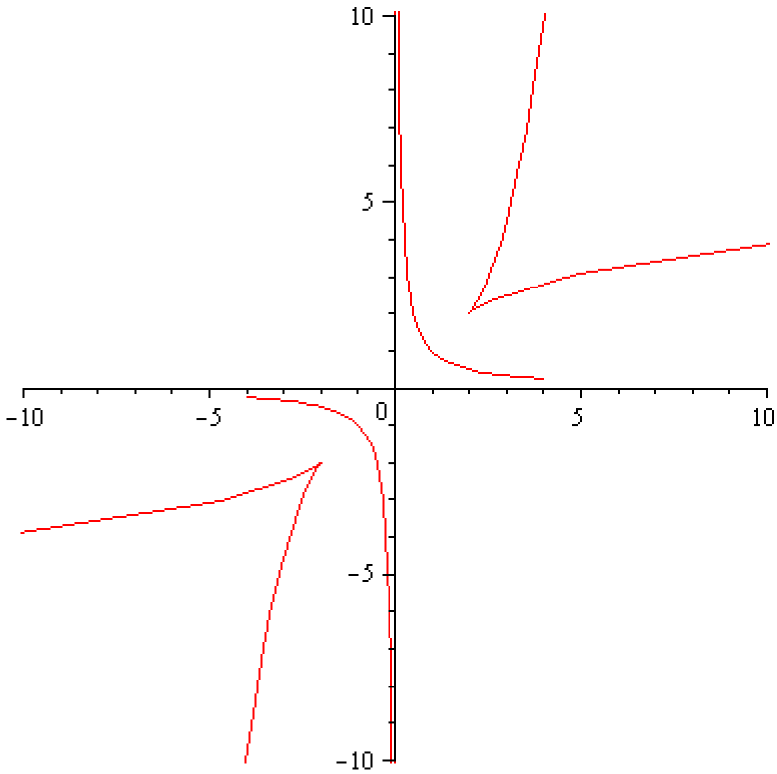
1. Hyperbole.

$$\begin{cases} x = t \\ y = \dfrac{1}{t} \end{cases}$$

L'équation de la développée est : $\boxed{\begin{cases} X(t) = x - y'\dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y" - x"y'} = x - y'\dfrac{s'^2}{d} \\ Y(t) = y + x'\dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y" - x"y'} = y + x'\dfrac{s'^2}{d} \end{cases}}$

On trouve :

$$\boxed{\begin{cases} X(t) = \dfrac{3t}{2} + \dfrac{1}{2t^3} \\ Y(t) = \dfrac{t^3}{2} + \dfrac{3}{2t} \end{cases}}$$



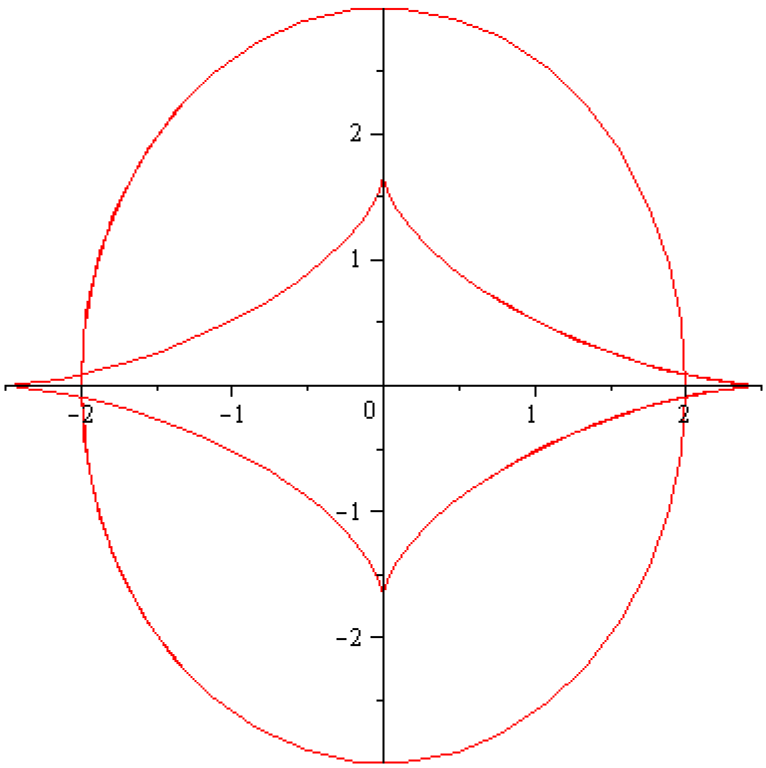
2. Ellipse. [Ramis5]p111

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = b\sin t \end{cases}$$

L'équation de la développée est : $\boxed{\begin{cases} X(t) = x - y' \dfrac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'} = x - y' \dfrac{s'^2}{d} \\ Y(t) = y + x' \dfrac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'} = y + x' \dfrac{s'^2}{d} \end{cases}}$

On trouve :

$$\boxed{\begin{cases} X(t) = \dfrac{(a^2-b^2)(\cos t)^3}{a} \\ Y(t) = \dfrac{-(a^2-b^2)(\sin t)^3}{b} \end{cases}}$$



Avec a=2 et b=3

3. Spirale.

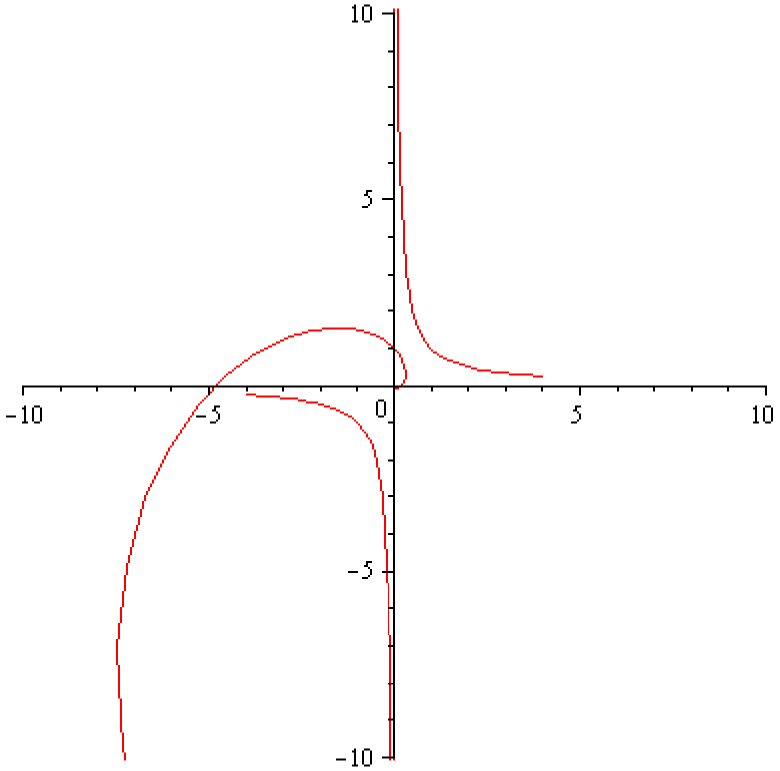
$$\rho = e^{\theta}$$

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases}$$

L'équation de la développée est : $\boxed{\begin{cases} X(t) = x - y' \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y" - x"y'} = x - y' \dfrac{s'^2}{d} \\ Y(t) = y + x' \dfrac{x'^2 + y'^2}{x'y" - x"y'} = y + x' \dfrac{s'^2}{d} \end{cases}}$

On trouve :

$$\boxed{\begin{cases} X(t) = -e^t\, sint\ t \\ Y(t) = e^t \cos t \end{cases}}$$



Exercice 4 Soit $m \in \mathbb{N}$ avec $m \geq 2$. On considère la courbe paramétrée dont le point variable est d'affixe :

$$z(t) = me^{it} - e^{imt}$$

a) Exprimer $z(-t)$ et $z(t + \frac{2\pi}{m-1})$ en fonction de $z(t)$. En déduire des propriétés sur la courbe et un intervalle d'étude judicieux. *(On se limitera dans la suite à cet intervalle d'étude)*
b) Décrire les points non réguliers.
c) Déterminer une abscisse curviligne.
d) Déterminer l'affixe du vecteur $\vec{T}$ et celle du vecteur $\vec{N}$. Déterminer l'angle formé par les vecteurs $\vec{i}$ et $\vec{T}$.
e) Exprimer la courbure de la courbe. La courbe admet-elle des points d'inflexion ?
f) Déterminer l'affixe du centre de courbure pour un point de la courbe.

<u>a.</u>

On a $z(-t) = m\,e^{-it} - e^{-imt}$, on peut passer en représentation paramétrique.

$$f(t) = \begin{cases} x(t) = m\cos t - \cos mt \\ y(t) = m\sin t - \sin mt \end{cases}$$

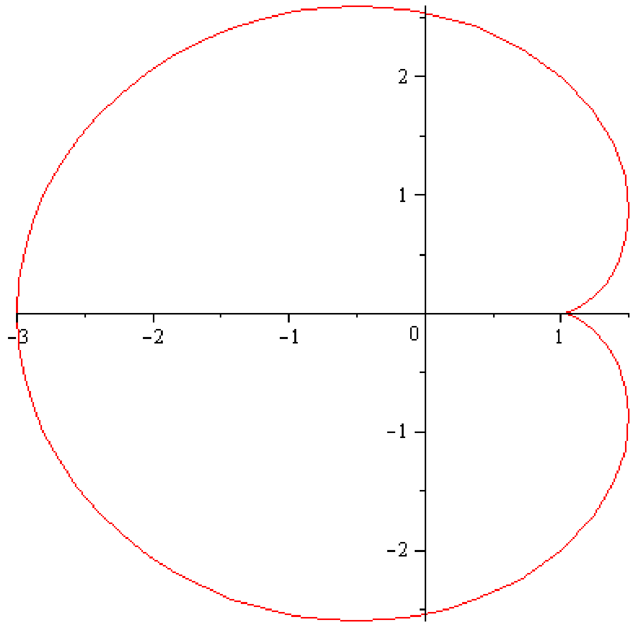
- $z(t+2\pi) = z(t)$ donc z est 2π-périodique, étude sur $[-\pi;\pi]$ (de même pour f)
- **Symétrie.**
  - $z(-t) = \overline{z(t)}$ donc Γ est symétrique par rapport à (Ox), **<u>étude sur [0 ; π].</u>**
    ou de même
  - $f(-t) = \begin{cases} x(t) \\ -y(t) \end{cases}$ donc Cf est symétrique par rapport à (Ox), **<u>étude sur [0 ; π].</u>**
- $\boldsymbol{z\left(t+\frac{2\pi}{m-1}\right)}$

$$z\left(t+\frac{2\pi}{m-1}\right) = m\,e^{i\left(t+\frac{2\pi}{m-1}\right)} - e^{im\left(t+\frac{2\pi}{m-1}\right)}$$
$$z\left(t+\frac{2\pi}{m-1}\right) = m\,e^{i\left(\frac{2\pi}{m-1}\right)}e^{it} - e^{i\left(\frac{m}{m-1}2\pi\right)}e^{imt} \qquad \text{or} \qquad \frac{m}{m-1} = \frac{m-1+1}{m-1} = 1 + \frac{1}{m-1}$$
$$z\left(t+\frac{2\pi}{m-1}\right) = m\,e^{i\left(\frac{2\pi}{m-1}\right)}e^{it} - e^{i(2\pi)}e^{i\left(\frac{2\pi}{m-1}\right)}e^{imt}$$
$$z\left(t+\frac{2\pi}{m-1}\right) = e^{i\left(\frac{2\pi}{m-1}\right)}\,z(t)$$

Donc on passe du point M d'affixe z(t) au point M' d'affixe $z\left(t+\frac{2\pi}{m-1}\right)$ par une rotation de centre O et d'angle $\frac{2\pi}{m-1}$.

Pour $m > 2$, On réduit donc l'intervalle d'étude à : $\boxed{\left[\mathbf{0}\,;\frac{2\pi}{m-1}\right]}$.

Pour $m = 2$, On réduit donc l'intervalle d'étude à : $[\mathbf{0}\,;\boldsymbol{\pi}]$.



pour m=2

b. Points non réguliers.

$$f'(t) = \begin{cases} x'(t) = m \sin mt - m \sin t \\ y'(t) = m \cos t - m \cos mt \end{cases}$$

Pour tout réel t

- $x^{'}(t) = m \sin mt - m \sin t = 0$, si $\quad \sin t = \sin mt \quad$ soit $\left| \begin{array}{l} t = mt\ [2\pi] \\ ou\ t = \pi - mt\ [2\pi] \end{array} \right.$

  donc puisque $m \geq 2 \quad \left| \begin{array}{l} t = 0 \left[\frac{2\pi}{m-1}\right] \\ ou\ t = \frac{\pi}{m+1} \left[\frac{2\pi}{m+1}\right] \end{array} \right.$
- On se place alors sur l'intervalle d'étude,
  $y^{'}(0) = 0 \qquad$ et pour $m \geq 2 \qquad y^{'}\left(\frac{\pi}{m+1}\right) \neq 0$

  Le seul point non régulier est donc :

$$M(0) = f(0) = \begin{cases} x(0) = m \cos 0 - \cos(m \times 0) \\ y(0) = m \sin 0 - \sin(m \times 0) \end{cases} = \boxed{A(m-1;0)}$$

Tangente en $\quad \boldsymbol{A(m-1;0)}$.

$$f'(0) = \begin{cases} 0 \\ 0 \end{cases}$$

- $f^{''}(t) = \begin{cases} x^{''}(t) = m^2 \cos mt - m \cos t \\ y^{''}(t) = m^2 \sin mt - m \sin t' \end{cases} \quad$ donc $\quad f^{''}(0) = \begin{cases} x^{''}(0) = m^2 - \text{m} \\ y^{''}(0) = 0 \end{cases}$

  or $x^{''}(0) = m^2 - m = m(m-1)$ donc puisque $m \geq 2$, $x^{''}(0) \neq 0$

et donc $f''(0) \neq (0;0)$.

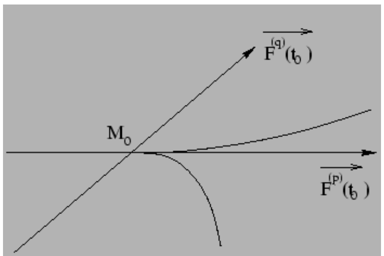
La tangente en A est donc dirigée par : $\boxed{\overrightarrow{f''(0)} = \begin{pmatrix} m^2-m \\ 0 \end{pmatrix}}$

- $f^{(3)}(t) = \begin{cases} x^{(3)}(t) = m\sin t - m^3 \sin mt \\ y^{(3)}(t) = m^3 \cos mt - m\cos t' \end{cases}$ donc $\boxed{f^{(3)}(0) = \begin{cases} x'''(0) = 0 \\ y'''(0) = m^3 - m \end{cases}}$

or $\det\left(\overrightarrow{f^{(2)}(t)}; \overrightarrow{f^{(3)}(t)}\right) = (m^2 - m) \times (m^3 - m) = m^2(m-1)(m^2-1)$

Donc <u>puisque $m \geq 2$</u>, **det** $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{f^{(2)}(t)}}; \overrightarrow{\boldsymbol{f^{(3)}(t)}}\right) \neq \mathbf{0}$ et $\left(\overrightarrow{\boldsymbol{f^{(2)}(t)}}; \overrightarrow{\boldsymbol{f^{(3)}(t)}}\right)$ **est libre.**

De ce fait on a $p = 2$ et $q = 3$, **La courbe présente en A un point de rebrousement de première espèce.**



p pair et q impair : point de rebroussement de $1^{ère}$ espèce

c. Abscisse curviligne.

<u>Abscisse curviligne</u> : On appelle abscisse curviligne sur Γ toute application $s : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(I)$ telle que :

$$\boxed{s'(t) = \|f'(t)\| = \left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\|}$$

On a donc s abscisse curviligne sur Γ ssi il existe a de I tel que : $s(t) = \int_a^t \|f'(t)\|\, dt$ (a est l'**origine**)

Il en existe donc une infinité qui se déduisent l'une de l'autre par une constante additive.

$$s'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} = \sqrt{(m \sin mt - m \sin t)^2 + (m \cos t - m \cos mt)^2}$$

$$s'(t) = m\sqrt{-2\,(cost \cos mt + \sin t \sin mt - 1)}$$

$$\boxed{s'(t) = m\sqrt{-2\,(\cos(mt - t) - 1)} = m\sqrt{2}\sqrt{1 - \cos[(m-1)t]}}$$

$$\boxed{s'(t) = m\sqrt{2}\sqrt{2\, sin^2\left(\frac{(m-1)t}{2}\right)} = 2m\left|sin\left(\frac{m-1}{2}\,t\right)\right| = 2m\, sin\left(\frac{m-1}{2}\,t\right)}$$

Car on a : $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{m-1}$ **et** $0 \leq \frac{m-1}{2}\,t \leq \pi$ donc $sin\left(\frac{m-1}{2}\,t\right) \geq 0$

On doit donc chercher une primitive de s'. (on pose k=m-1)

$$s(t) = m\sqrt{2}\int_a^t \sqrt{1-\cos[kx]}\,dx$$

$$s(t) = m\sqrt{2}\int_a^t \sqrt{2\,sin^2\left(\frac{kx}{2}\right)}\,dx$$

$$s(t) = 2m\int_a^t sin\left(\frac{kx}{2}\right)dx$$

$\boxed{s(t) = \frac{-4m}{m-1}\cos\left(\frac{m-1}{2}\,t\right)}$ pour t dans l'intervalle d'étude.

Autre méthode

En posant $u = cos[kx]$ *pour* $0 \le a \le x \le t \le \pi$*, on prend par exemle a=0*

$$\int_0^t \sqrt{1-cos[kx]}\,dx = -\frac{1}{k}\int_{cos\,kt}^{1}\frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \frac{1}{k}\int_1^{cos\,kt}\frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-u^2}}\,du$$

on suppose l'intégrale définie (on peut remplacer 1 par b et faire tendre b vers 1)

$$\frac{1}{k}\int_b^{cos\,kt}\frac{\sqrt{1-u}}{\sqrt{1-u^2}}\,du = \frac{1}{k}\int_b^{cos\,kt}\frac{1}{\sqrt{1+u}}\,du = \frac{2}{k}\left[\sqrt{1+u}\right]_a^{cos\,kt}$$

On peut donc prendre comme abscisse curviligne :

$$s(t) = -\frac{2m\sqrt{2}}{m-1}\sqrt{1+cos(m-1)t} = -\frac{2m\sqrt{2}}{m-1}\sqrt{2\,cos^2\left(\frac{m-1}{2}\,t\right)}$$

$$\boxed{s(t) = \frac{-4m}{m-1}\cos\left(\frac{m-1}{2}\,t\right)}$$

d. Vecteurs de Frenet.

$$s'(t) = \left\|\overrightarrow{f'(t)}\right\| = m\sqrt{2}\sqrt{1-\cos[(m-1)t]}$$

- $\boxed{\vec{T} = \frac{\overrightarrow{dM}}{ds}}$ donc $\boxed{\vec{T} = \frac{dt}{ds}\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \frac{1}{s'(t)}\left(x'(t)\,\vec{\imath} + y'(t)\,\vec{\jmath}\right)}$ soit ici

$$\boxed{\vec{T} = \frac{1}{m\sqrt{2}\sqrt{1-\cos[(m-1)t]}}\begin{pmatrix} m\sin mt - m\sin t \\ m\cos t - m\cos mt\end{pmatrix}}$$

On applique les formules : $\cos a - \cos b = -2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$

$$\sin a - \sin b = 2\cos\frac{a+b}{2}\sin\frac{a-b}{2}$$

$$\vec{T} = \frac{1}{2m\left|sin\left(\frac{m-1}{2}t\right)\right|}\begin{pmatrix} 2\cos\left(\frac{mt+t}{2}\right)\sin\left(\frac{mt-t}{2}\right) \\ 2\sin\left(\frac{t+mt}{2}\right)\sin\left(\frac{mt-t}{2}\right)\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{T} = \varepsilon\frac{1}{m}\begin{pmatrix}\cos\left(\frac{mt+t}{2}\right) \\ \sin\left(\frac{t+mt}{2}\right)\end{pmatrix}}$$

- $\boxed{\vec{N} = -\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\,\vec{\imath} + \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\,\vec{\jmath}}$ donc ici

$$\boxed{\vec{N} = \varepsilon\frac{1}{m}\begin{pmatrix}-\sin\left(\frac{t+mt}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{mt+t}{2}\right)\end{pmatrix}}$$

- Soit $\varphi = \widehat{(\vec{\imath},\vec{T})}$ qui est déterminé par : $\begin{cases}\cos\varphi = \varepsilon\frac{1}{m}\cos\left(\frac{mt+t}{2}\right) \\ \sin\varphi = \varepsilon\frac{1}{m}\sin\left(\frac{mt+t}{2}\right)\end{cases}$

ou $\tan\varphi = \frac{\cos t - \cos mt}{\sin mt - \sin t} = \frac{-2\sin\left(\frac{t+mt}{2}\right)\sin\left(\frac{t-mt}{2}\right)}{2\cos\left(\frac{mt+t}{2}\right)\sin\left(\frac{mt-t}{2}\right)} = \tan\left(\frac{t+mt}{2}\right)$

soit $\tan\varphi = \tan\left(\frac{t+mt}{2}\right)$

Donc : $\boxed{\boldsymbol{\varphi = \frac{t+mt}{2}\,[\pi] = \frac{m+1}{2}\,t\,[\pi]}}$

e. Courbure de la courbe.

$$\boxed{R = \frac{s'}{\varphi'} = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-x''y'} = \frac{\|f'(t)\|^3}{\det(f',f'')}} \text{ et } \boxed{\boldsymbol{\gamma(s) = \frac{1}{R}}}$$

$$\boxed{R = \frac{2m\sqrt{2-2\cos(mt-t)}}{m+1} = \frac{2m\sqrt{2}\sqrt{1-\cos(mt-t)}}{m+1}}$$

ou alors en utilisant le résltat précédent :

$$\boxed{R = \frac{s'}{\varphi'} = \frac{2m\left|sin\left(\frac{m-1}{2}t\right)\right|}{\frac{m+1}{2}} = \frac{4m\left|sin\left(\frac{m-1}{2}t\right)\right|}{m+1}}$$

Points d'infexions.

R ne change pas de signe..

f. Affixe du centre de courbure.

Par définition, le cercle de courbure en M est le cercle de centre C et de rayon R avec :

$$\boxed{\overrightarrow{MC} = R\,\vec{N}}$$

$$\begin{cases} x_C = \varepsilon\dfrac{1}{m} \times R \times \left[-\sin\left(\dfrac{t+mt}{2}\right)\right] + x(t) \\ y_C = \varepsilon\dfrac{1}{m} \times R \times \cos\left(\dfrac{mt+t}{2}\right) + y(t) \end{cases}$$

Exercice 5 Soit Γ la courbe paramétrée par

$$M(t) = (t\cos t - \sin t, t\sin t + \cos t)$$

a) Γ a-t-elle des points non réguliers, non biréguliers ? Quelle est l'allure de la courbe en ce(s) points ?
b) Déterminer une abcisse curviligne, les vecteurs de Frenet et la courbure de Γ.
c) Déterminer la développée de Γ.
d) Après étude de Γ, représenter Γ et sa développée (on se limitera à $t \in [-2\pi, 2\pi]$).

a)Points non réguliers et non biréguliers. $Df = \mathbb{R}$

Symétries.

- $\boxed{f(-t) = \begin{cases} x(-t) = -x(t) \\ y(-t) = y(t) \end{cases}}$ donc la courbe présente une symétrie par rapport à (Oy),

  Etude sur [0 ;+∞[.

Points non réguliers

$$f(t) = \begin{cases} x(t) = t\cos t - \sin t \\ y(t) = t\sin t + \cos t \end{cases} \quad \text{et} \quad \boxed{f'(t) = \begin{cases} x'(t) = -t\sin t \\ y'(t) = t\cos t \end{cases}}$$

- $x^{'}(t) = -t\sin t = 0$ si $\quad t = 0\ [\pi]$
- $Or\ y^{'}(0) = 0\ et\ \forall k \in \mathbb{Z}^{*}, y^{'}(k\pi) \neq 0$

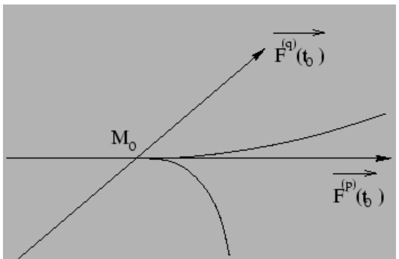
Donc le seul point non régulier est $\boxed{M(0) = A(0\,;1)}$.

Etude le l'allure de la courbe en M(0)=A(0 ;1).

$$\boxed{f''(t) = \begin{cases} x''(t) = -t\cos t - \sin t \\ y''(t) = \cos t - t\sin t \end{cases}} \quad \text{et} \quad \boxed{f'''(t) = \begin{cases} x'''(t) = t\sin t - 2\cos t \\ y'''(t) = -t\cos t - 2\sin t \end{cases}}$$

- $\overrightarrow{f''(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ porte la tangente en A.
- $et\ \overrightarrow{f'''(0)} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur tel que $\left(\overrightarrow{f'(0)}; \overrightarrow{f''(0)}\right)$ **est libre**

De ce fait on a $p = 2\ et\ q = 3$, La courbe présente en A un point de rebrousement de première espèce.



p **pair et** q **impair : point de rebroussement de** $1^{ère}$ **espèce**

Points non biréguliers.

$\boxed{d = det\left(f^{'}(t), f^{''}(t)\right) = t^2}$ Or $t^2 = 0$ ssi $t = 0$

Donc M(0)=A(0 ;1) est le seul point non birégulier.

b. Abscisse curviligne, vecteurs de Frenet et courbure.

Abscisse curviligne : On appelle abscisse curviligne sur Γ toute application $s : I \to \mathbb{R}$ de classe $C^1(I)$ telle que :

$$\boxed{s'(t) = \|f^{'}(t)\| = \left\|\frac{d\overrightarrow{M}}{dt}\right\|}$$

On a donc s abscisse curviligne sur Γ ssi il existe a de I tel que : $s(t) = \int_a^t \|f^{'}(t)\|\,dt$ (a est l'**origine**)

Il en existe donc une infinité qui se déduisent l'une de l'autre par une constante additive.

$$f'(t) = \begin{cases} x'(t) = -\,\mathrm{t}\sin\mathrm{t} \\ y'(t) = t\cos\mathrm{t} \end{cases}$$

- $\boxed{s'(t) = |t| = t}$ (Si on travaille sur **[0 ;+∞[.**)
- $\boxed{\begin{cases} si\ t \geq 0\,, s(t) = \frac{t^2}{2} \\ si\ t < 0\,, s(t) = \frac{-t^2}{2} \end{cases}}$ est une abscisse curbiligne possible.

- Pour t non nul, $t > 0$:

$\boxed{\vec{T} = \frac{d\overrightarrow{M}}{ds}}$ donc $\boxed{\vec{T} = \frac{dt}{ds}\frac{d\overrightarrow{M}}{dt} = \frac{1}{s^{'}(t)}\left(x'(t)\,\vec{\imath} + y'(t)\,\vec{\jmath}\right)}$ soit ici : $\vec{T} = \frac{1}{t}\begin{pmatrix} -\,\mathrm{t}\sin\mathrm{t} \\ t\cos\mathrm{t} \end{pmatrix}$

$$\boxed{Pour\ t > 0, \vec{T} = \begin{pmatrix} -\sin\mathrm{t} \\ \cos\mathrm{t} \end{pmatrix}}$$

- $\boxed{\vec{N} = -\frac{y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\,\vec{\imath} + \frac{x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\,\vec{\jmath}}$ donc $\boxed{Pour\ t > 0,\ \vec{N} = \begin{pmatrix} -\cos\mathrm{t} \\ -\sin\mathrm{t} \end{pmatrix}}$
- $\boxed{R = \frac{s'}{\varphi'} = \frac{(x'^2+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{x'y''-x''y'} = \frac{\|f^{'}(t)\|^3}{\det(f',f'')}}$ et $\boxed{\boldsymbol{\gamma(s) = \frac{1}{R}}}$

$$\boxed{R = \frac{\|f^{'}(t)\|^3}{\det(f',f'')} = \frac{|t|^3}{t^2} = |t|}\ \text{et}\ \boxed{\boldsymbol{\gamma(s) = \frac{1}{|t|}}}$$

c. Développée de la courbe.

L'équation de la développée est : $\boxed{\begin{cases} X(t) = x - y'\dfrac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'} = x - y'\dfrac{s'^2}{d} \\ Y(t) = y + x'\dfrac{x'^2+y'^2}{x'y''-x''y'} = y + x'\dfrac{s'^2}{d} \end{cases}}$

On trouve :

$$\boxed{\begin{cases} X(t) = -\sin t \\ Y(t) = \cos t \end{cases}}$$