

TD 7 - Algèbre linéaire : généralités et déterminants

Exercice 1 Montrer que les vecteurs $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ forment une base de \mathbb{R}^3 . Calculer les coordonnées respectives des vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ dans cette base.

Exercice 2 Parmi les ensembles suivants reconnaître ceux qui sont des sous-espaces vectoriels.

$$E_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x + y + a = 0, \text{ et } x + 3az = 0 \right\}$$

$$E_2 = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(1) = 0 \}, \quad E_3 = \{ f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(0) = 1 \}$$

$$E_4 = \{ P \in \mathbb{R}_n[X]; P' = 3 \}, \quad E_5 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2; x + 2y + 1 \geq 0 \right\}.$$

Exercice 3 Dans \mathbb{R}^4 on considère l'ensemble E des vecteurs (x_1, x_2, x_3, x_4) vérifiant l'équation $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$. L'ensemble E est-il un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^4 ? Si oui, en donner une base.

Exercice 4 Soient $\vec{v}_1(1, 2, 3, 4), \vec{v}_2(2, 2, 2, 6), \vec{v}_3(0, 2, 4, 4), \vec{v}_4(1, 0, -1, 2), \vec{v}_5(2, 3, 0, 1)$ dans \mathbb{R}^4 . Soient $F = \text{Vect}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3\}$ et $G = \text{Vect}\{\vec{v}_4, \vec{v}_5\}$. Déterminer une base des sous-espaces $F \cap G, F, G$ et $F + G$.

Exercice 5

On considère dans \mathbb{R}^n une famille de 4 vecteurs linéairement indépendants : $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3, \vec{e}_4)$. Les familles suivantes sont-elles libres?

1. $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_2, \vec{e}_3)$.
2. (\vec{e}_1, \vec{e}_3) .
3. $(\vec{e}_1, 2\vec{e}_1 + \vec{e}_4, \vec{e}_4)$.
4. $(3\vec{e}_1 + \vec{e}_3, \vec{e}_3, \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$.
5. $(2\vec{e}_1 + \vec{e}_2, \vec{e}_1 - 3\vec{e}_2, \vec{e}_4, \vec{e}_2 - \vec{e}_1)$.

Exercice 6 Dans \mathbb{R}^4 , comparer les sous-espaces F et G suivants :

$$F = \text{Vect}\{(1, 0, 1, 1), (-1, -2, 3, -1), (-5, -3, 1, -5)\}$$

$$G = \text{Vect}\{(-1, -1, 1, -1), (4, 1, 2, 4)\}$$

Exercice 7 Vérifier que les applications suivantes sont linéaires, déterminer leurs noyaux (et la dimension des noyaux), et les matrices associées dans les bases canoniques :

- a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ avec $f(x, y) = (2x + 3y, x + y)$
- b) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec $f(x, y, z) = (2x + y + z, -x + y, 3x + y + 2z)$
- c) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ avec $f(x, y, z) = (x + y + z, y + 2z, x - z)$

Exercice 8 Soit f un endomorphisme défini sur E de dimension 2. On suppose que $f \circ f = 0$ et $f \neq 0$.

- a) Montrer qu'il existe a tel que $f(a) \neq 0$.
- b) On pose $b = f(a)$. Montrer que (a, b) est une base de E .
- c) Quelle est la matrice associée à f dans la base (a, b) ?

Exercice 9 Soient E l'espace vectoriel des polynômes de degré au plus 3 et δ l'endomorphisme de E qui à un polynôme associe son polynôme dérivé.

- a) Ecrire la matrice C de δ dans la base canonique $\mathcal{C} = (1, X, X^2, X^3)$ de E .
 b) Ecrire la matrice B de δ dans la base $\mathcal{B} = (1, 1 + X, 1 + X^2, 1 + X^3)$.

Exercice 10 — Calculer les déterminants :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 5 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 5 \end{vmatrix}, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_4 = \begin{vmatrix} 0 & a & b & c \\ a & 0 & b & c \\ a & b & 0 & c \\ a & b & c & 0 \end{vmatrix},$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}, \quad \Delta_6 = \begin{vmatrix} a & a & a^2 & b+c+d \\ a & b & b^2 & c+d+a \\ a & c & c^2 & d+a+b \\ a & d & d^2 & a+b+c \end{vmatrix}, \quad \Delta_7 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & a & a^2 \\ 0 & 1 & b & b^2 \\ 1 & 0 & c & c^2 \\ 0 & 1 & d & d^2 \end{vmatrix}.$$

Exercice 11 — A est une matrice de taille n , antisymétrique (c'est-à-dire que ${}^tA = -A$).
 Montrer que si A est inversible, n est pair.

Exercice 12 — Déterminer le déterminant des matrices de taille n de coefficients a_{ij} dans les cas suivants :

1. $a_{ij} = i^3 + 3i^2 - 5$
2. $a_{ij} = ij$
3. $a_{ij} = i + j$

Exercice 13 — Calculer, pour tout $t \in \mathbb{R}$ le rang des matrices $M_t = \begin{pmatrix} 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \\ 1 & t & 1 \end{pmatrix}$ et $N_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & t \\ 1 & t & 1 \\ t & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 14 — Soit A la matrice de taille n suivante, où a, b, c sont des réels (on suppose $b \neq c$).

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ c & a & b & \ddots & b \\ c & c & a & \ddots & b \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ c & c & c & \cdots & a \end{pmatrix}$$

On note B la matrice de taille n avec tous ses coefficients égaux à 1.

- a) On introduit la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = \det(A + xB)$.
 Que valent $f(-c)$ et $f(-b)$?
 b) Montrer que la fonction f peut s'écrire $f(x) = \alpha x + \beta$, avec α et β deux réels.
 c) Déterminer α et β grâce à la question a).
 d) Que vaut $\det A$?

Exercice 17 —

Soit u l'application de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ définie par $u(P) = P + P'$. Calculer $\det u$. Même question lorsque $u(P) = XP' + P(1)$.