TD n°8 : CORRECTION

Algèbre linéaire : Diagonalisation. .

Exercice 1 — On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x,y)=(x-y,-x+2y)$.
a) Déterminer χ_f et les valeurs propres de f.
b) Pour chacune des valeurs propres de f, on précisera l'espace propre correspondant (en le décrivant à l'aide d'une base).
c) f est-il diagonalisable ?

a)

$$\boxed{A = Mat_{(e_1,e_2)}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}}$$

$$\chi_A(X) = \det(A - X.Id_n) = \begin{vmatrix} 1-X & -1 \\ -1 & 2-X \end{vmatrix} = (1-X)(2-X) - 1$$

$$\chi_A(X) = \frac{1}{4}\left(2x+\sqrt{5}-3\right)\left(2x-\sqrt{5}-3\right)$$

Donc : $\boxed{Sp_K(A) = \left\{\frac{3+\sqrt{5}}{2} ; \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right\}}$

b)

- $\boldsymbol{SEP\left(A, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = Ker\left(A - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right).Id_n\right)}$

$$\begin{cases} \left(1-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)x - 1 = 0 \\ -x + \left(2-\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)y = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x + \frac{\sqrt{5}-1}{2}\, y = 0 \end{cases}$$

$$SEP\left(A, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \left\{(x;y)\ tq\ x = -\frac{\sqrt{5}-1}{2}\,y\right\} = \left\{\begin{pmatrix} -\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\,y \\ y \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}\right\}$$

$$\boxed{SEP\left(A, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right) = \left\{y\begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}, y \in \mathbb{R}\right\} = Vect\left\{\begin{pmatrix} \dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = Vect\{\,c1\,\}}$$

- $\boldsymbol{SEP\left(A, \frac{3-\sqrt{5}}{2}\right) = Ker\left(A - \left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right).Id_n\right)}$

$$\begin{cases} \left(1-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)x - 1 = 0 \\ -x + \left(2-\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)y = 0 \end{cases} \quad \text{soit} \quad \begin{cases} x - \frac{\sqrt{5}+1}{2}\, y = 0 \end{cases}$$

$$SEP\left(A,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=\left\{(x;y)\ tq\ \ x=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ y\right\}=\left\{\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ y\\ y\end{pmatrix},y\ \in\mathbb{R}\right\}$$

$$\boxed{SEP\left(A\,,\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)=\left\{y\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ 1\end{pmatrix},y\ \in\mathbb{R}\right\}=Vect\ \left\{\begin{pmatrix}\frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ 1\end{pmatrix}\right\}=Vect\ \{\ c2\}}$$

c)

f est diagonalisable et

$$\boxed{Mat_{(c_1,c_2)}(f)=\begin{pmatrix}\frac{3+\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & \frac{3-\sqrt{5}}{2}\end{pmatrix}}$$

$$\boxed{P=\begin{pmatrix}\frac{1-\sqrt{5}}{2} & \frac{1+\sqrt{5}}{2}\\ 1 & 1\end{pmatrix}}$$

Exercice 2 — Mêmes questions que l'exercice précédent, avec $f(x,y)=(x,y-2x)$.

Exercice 3

Chercher les valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres des matrices suivantes. Déterminer si elles sont diagonalisables.

$$A=\begin{pmatrix}2&0&4\\3&-4&12\\1&-2&5\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-1&1&0\\0&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\quad C=\begin{pmatrix}3&2&0\\-1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}4&0&-1\\0&-2&-6\\0&4&8\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}3&-4&0&2\\4&-5&-2&4\\0&0&3&-2\\0&0&2&-1\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\3&0&2&0\\0&2&0&3\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

$$G=\begin{pmatrix}-4&0&-2\\0&1&0\\5&1&3\end{pmatrix}\quad H=\begin{pmatrix}8&-1&-5\\-2&3&1\\4&-1&-1\end{pmatrix}$$

Exercice 3

- $\chi_A(x)=-x(x-2)(x-1)$
- $Sp_{\mathbb{R}}(A)=\{0;1;2\}$
- $SEP(A,0)=Vect\begin{pmatrix}-2\\\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}$
- $SEP(A,1)=Vect\begin{pmatrix}-4\\0\\1\end{pmatrix}$
- $SEP(A,2)=Vect\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$
- A diagonalisable, $A=PDP^{-1}$, avec $P=\begin{pmatrix}-2&-4&2\\\frac{3}{2}&0&1\\1&3&0\end{pmatrix}$ Et $D=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}$

- $\chi_B(x)=-x(x^2+3x+3)$
- $Sp_{\mathbb{R}}(B)=\{0\}$ et $Sp_{\mathbb{C}}(B)=\left\{0,\frac{-3+i\sqrt{3}}{2};\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right\}$
- $SEP(B,0)=Vect\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=Vect(v_1)$
- $SEP\left(B,\frac{-3+i\sqrt{3}}{2}\right)=Vect\begin{pmatrix}\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\\\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\\1\end{pmatrix}=Vect(v_2)$
- $SEP\left(B,\frac{-3-i\sqrt{3}}{2}\right)=Vect\begin{pmatrix}\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\\\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\\1\end{pmatrix}=Vect(v_3)$

- B diagonalisable dans $\mathbb{C}$ seulement , $B = PDP^{-1}$,

  avec $P = (v_1, v_2, v_3)$ Et $D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-3+i\sqrt{3}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-3-i\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$

- $\chi_C(x) = -(x-2)(x-1)^2$
- $Sp_{\mathbb{R}}(C) = \{1; 2\}$
- $SEP(C,1) = Vect\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\} = Vect(v_1, v_2)$
- $SEP(C,2) = Vect\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = Vect(v_3)$
- C diagonalisable, $C = PDP^{-1}$,

  avec $P = (v_1, v_2, v_3)$ Et $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- $\chi_D(x) = -(x-2)(x-4)^2$
- $Sp_{\mathbb{R}}(D) = \{2; 4\}$
- $SEP(D,2) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = Vect(v_1)$
- $SEP(D,4) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Vect(v_2)$
- D n'est donc pas diagonalisable puisque $\dim\big(SEP(D,4)\big) = 1$ pour une vp d'ordre 2

- $\chi_E(x) = (x-1)^2(x+1)^2$
- $Sp_{\mathbb{R}}(E) = \{-1; 1\}$
- $SEP(E,-1) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = Vect(v_1)$
- $SEP(E,1) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = Vect(v_2)$
- E n'est donc pas diagonalisable puisque $\dim\big(SEP(E,\pm 1)\big) = 1$ pour une vp d'ordre 2

- $\chi_F(x) = (x-1)(x+1)(x-3)(x+3)$
- $Sp_{\mathbb{R}}(F) = \{-3; -1; 1; 3\}$

- $SEP(F,-3) = Vect\begin{pmatrix}-1\\3\\-3\\1\end{pmatrix} = Vect(v_1)$
- $SEP(F,-1) = Vect\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\\1\end{pmatrix} = Vect(v_2)$
- $SEP(F,1) = Vect\begin{pmatrix}-1\\-1\\1\\1\end{pmatrix} = Vect(v_3)$
- $SEP(F,3) = Vect\begin{pmatrix}1\\3\\3\\1\end{pmatrix} = Vect(v_4)$
- F diagonalisable, $F = PDP^{-1}$,

  avec $P = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ Et $D = \begin{pmatrix}-3 & 0 & 0 & 0\\0 & -1 & 0 & 0\\0 & 0 & 1 & 0\\0 & 0 & 0 & 3\end{pmatrix}$

- $\chi_G(x) = -(x-1)^2(x+2)$
- $Sp_{\mathbb{R}}(G) = \{-2; 1\}$
- $SEP(G,-2) = Vect\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix} = Vect(v_1)$
- $SEP(G,1) = Vect\begin{pmatrix}-2\\0\\5\end{pmatrix} = Vect(v_2)$
- G n'est donc pas diagonalisable puisque $\dim\big(SEP(G,1)\big) = 1$ pour une vp d'ordre 2

- $\chi_H(x) = -(x-4)^2(x-2)$
- $Sp_{\mathbb{R}}(H) = \{2; 4\}$
- $SEP(H,2) = Vect\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = Vect(v_1)$
- $SEP(H,4) = Vect\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = Vect(v_2)$
- H n'est donc pas diagonalisable puisque $\dim\big(SEP(H,4)\big) = 1$ pour une vp d'ordre 2

Exercice 4

Ici, u est diagonalisable sur E de dimension n donc il existe n vecteurs propres $(v_1, \dots, v_n)$ associé à une unique vp λ tels que : $u\,(v_i) = \lambda \;\; v_i$

Les vecteurs propres formant une base de E, pour tout i de $\{1, .., n\}$ on a :

Pour tout vecteur x de E : $x = \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i$

Soit :

$$u(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, u(v_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i\, \lambda \quad v_i = \lambda \quad \sum_{i=1}^{n} a_i\, v_i = \lambda \quad x$$

Exercice 5

a - Diagonalisons la matrice A

- $\chi_A(x) = (x-3)(x+2)$
- $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{-2; 3\}$
- $SEP(A, 3) = Vect\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$
- $SEP(A, -2) = Vect\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$
- A diagonalisable, $A = PDP^{-1}$, avec $P = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ Et $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$

b – Exprimons F^3

$$\mathrm{F}^3 = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{B}^3\mathrm{P} = \mathrm{P}^{-1}\mathrm{AP} = \mathrm{D}$$

c – Montrons que : FD=DF

- $\mathrm{FD} = \mathrm{FF}^3 = \mathrm{F}^4$
- $\mathrm{DF} = \mathrm{F}^3\mathrm{F} = \mathrm{F}^4$

Donc FD=DF

d – En déduire que F est diagonale.

$$\mathrm{FD} = \begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3f_1 & -2f_2 \\ 3f_3 & -2f_4 \end{pmatrix}$$

$$\mathrm{DF} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} f_1 & f_2 \\ f_3 & f_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3f_1 & 3f_2 \\ -2f_3 & -2f_4 \end{pmatrix}$$

Donc puisque FD=DF

$$-2f_3 = 3f_3 \quad \text{et} \quad 3f_2 = -2f_2$$

Et donc F est diagonale puisque $f_3 = f_2 = 0$

e – En déduire que F et B.

F est diagonale et $F^3 = D$, donc $\boxed{F = \begin{pmatrix} \sqrt[3]{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}}$

$$B = PFP^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt[3]{3} & 0 \\ 0 & -\sqrt[3]{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \end{pmatrix} = \boxed{\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 4\sqrt[3]{3} - \sqrt[3]{2} & 2\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{2} \\ 2\sqrt[3]{3} + 2\sqrt[3]{2} & \sqrt[3]{3} - 4\sqrt[3]{2} \end{pmatrix}}$$

Exercice 6

a, b - Vp de A et diagonalisation.

- $\chi_A(x) = (x-2)^2$
- $Sp_{\mathbb{R}}(A) = \{2\}$
- $SEP(A,2) = Vect\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = Vect(v_1)$
- A n'est donc pas diagonalisable puisque $\dim\big(SEP(A,2)\big) = 1$ pour une vp d'ordre 2

c- Inverse de P

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } \boxed{P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}}$$

d- Expression de T.

$$T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ donc } \boxed{\mathrm{T} = 2\mathrm{I} + \mathrm{J}}$$

d- Expression de T^n

$$\boxed{T^n = (2I+J)^n = 2^n I + n2^{n-1}J}$$

d- Expression de A^n

$$\boxed{A^n = PT^nP^{-1} = \begin{pmatrix} 2^n + n2^{n-1} & n2^{n-1} \\ -n2^{n-1} & 2^n - n2^{n-1} \end{pmatrix}}$$