TD 8 - Diagonalisation

Exercice 1 — On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ défini par $f(x, y) = (x - y, -x + 2y)$.
a) Déterminer χ_f et les valeurs propres de f.
b) Pour chacune des valeurs propres de f, on précisera l'espace propre correspondant (en le décrivant à l'aide d'une base).
c) f est-il diagonalisable ?

Exercice 2 — Mêmes questions que l'exercice précédent, avec $f(x, y) = (x, y - 2x)$.

Exercice 3
Chercher les valeurs propres et la dimension des sous-espaces propres des matrices suivantes. Déterminer si elles sont diagonalisables.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 3 & -4 & 12 \\ 1 & -2 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & 4 & 8 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 0 & 2 \\ 4 & -5 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad H = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -5 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Exercice 4 — Sur E un espace vectoriel de dimension n, u est un endomorphisme diagonalisable qui ne possède qu'une valeur propre λ. Montrer que pour tout $x \in E$, $u(x) = \lambda x$.

Exercice 5 Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$
a) Diagonaliser A. (On déterminera D et P tels que $A = PDP^{-1}$).
b) On suppose que B est une matrice telle que $B^3 = A$. On pose $F = P^{-1}BP$. Exprimer F^3.
c) Montrer que $FD = DF$.
d) En déduire que F est diagonale.
e) En déduire F et B.

Exercice 6
Soit
$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
a) A admet-elle des valeurs propres ? Lesquelle(s) ?
b) A est-elle diagonalisable ?
c) Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer l'inverse de P.
d) On pose $T = P^{-1}AP$. Calculer T. On exprimera T en fonction de I_2 et de la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

e) Montrer que
$$T^n = 2^n I_2 + n2^{n-1} J$$

f) En déduire A^n.

Exercice 7 Soit $A \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calculer le polynôme minimal de A. En déduire A^{-1}, A^3 et A^5.

Exercice 8 Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f - id) = 1$. On note $H = \mathrm{Ker}(f - id)$.

1. Soit $\{e_1, \cdots, e_{n-1}\}$ une base de H et $e_n \notin H$. Montrer que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ est une base de E et donner l'allure de la matrice de f dans cette base.
2. Montrer que le polynôme $(X-1)(X-\det(f))$ annule f. Donner une condition nécéssaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 9 Soit J la matrice
$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

1. Trouver une relation entre J et J^2.
2. En déduire les valeurs propres de J et calculer les dimensions des espaces propres.
3. Donner le polynôme caractéristique de J. J est-elle diagonalisable ?

Exercice 10

Pour quelles valeurs de $(a, b, c) \in \mathbb{C}^2$ la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & b & 2 \\ 0 & 0 & 2 & c \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ? On ne cherchera pas à réduire explicitement A.

Exercice 11 Soit $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 & 2 \\ 7 & 0 & 2 \\ -18 & 3 & -4 \end{pmatrix}$

a) Montrer que les valeurs propres de A sont 1 et 2. Prouver que A n'est pas diagonalisable.
b) Déterminer X un vecteur propre de A pour la valeur propre 2, Y un vecteur propre de A pour la valeur propre 1. Déterminer Z une matrice colonne tel que $AZ = Z + Y$.
c) Montrer que (X, Y, Z) forme une base. On considère P la matrice dont les colonnes sont X, Y, Z
d) Soit la matrice $T = P^{-1}AP$. Déterminer T. Que peut-on dire de A ?
e) Calculer pour tout $n \in \mathbb{N}$, T^n.
f) En déduire A^n