Exercice 1 :

Question 1.a. On pose $z_i = \ln y_i$.

Année	1999	2000	2001	2002	2003	2004
Rang x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre y_i de pots de plantes	5702	5490	5400	5319	5200	5180
$z_i = \ln y_i$	8,65	8,61	8,59	8,58	8,56	8,55

Question 1.b. Traçons le nuage de points N_i pour i variant de 1 à 6.

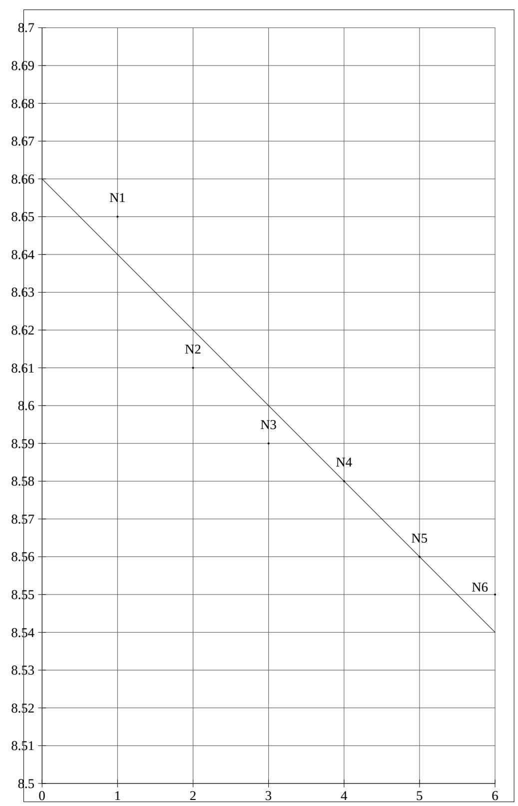

Fig. 1 – nuage de points et droite d'ajustement d

Question 2.a. Soit d la droite d'ajustement de z en x (obtenue par la méthode des moindres carrées).L'équation de cette droite d est : z = - 0,02 x + 8,66.

Question 2.b. : voir le graphique précédent (Fig 1.)

Question 2.c. Nous savons que z= ln y donc y= e^z. Or nous venons d'écrire que : z = - 0,02 x + 8,66 donc y= $e^{-0,02x+8,66}$.

Utilisons les propriétés de la fonction exponentielle ($e^{a+b} = e^a \times e^b$ pour a et b réels), ainsi, nous pouvons écrire : y= $e^{-0,02x} \times e^{8,66}$.
Ecrivons y sous la forme y= A $\times$ e^{Bx} avec A arrondi à l'unité et B arrondi au centième :

Nous avons : $\boxed{\text{y}= 5768 \times e^{-0,02x}}$

Question 3.a.

Le rang associé à 2006 est 8.

Pour x=8, y = 5768 $\times$ $e^{-0,02\times 8}$.

On peut espérer vendre $\boxed{\text{4915 milliers de pots}}$ (résultat arrondi à l'unité)

Question 3.b.

5085 - 4915= 170 et le pourcentage demandé est :
$\frac{170}{4915} \times 100$ soit $\boxed{3,46 \quad \text{pour cent}}$ (arrondi au centième près).

Exercice 2 (spécialité) :

Question 1.

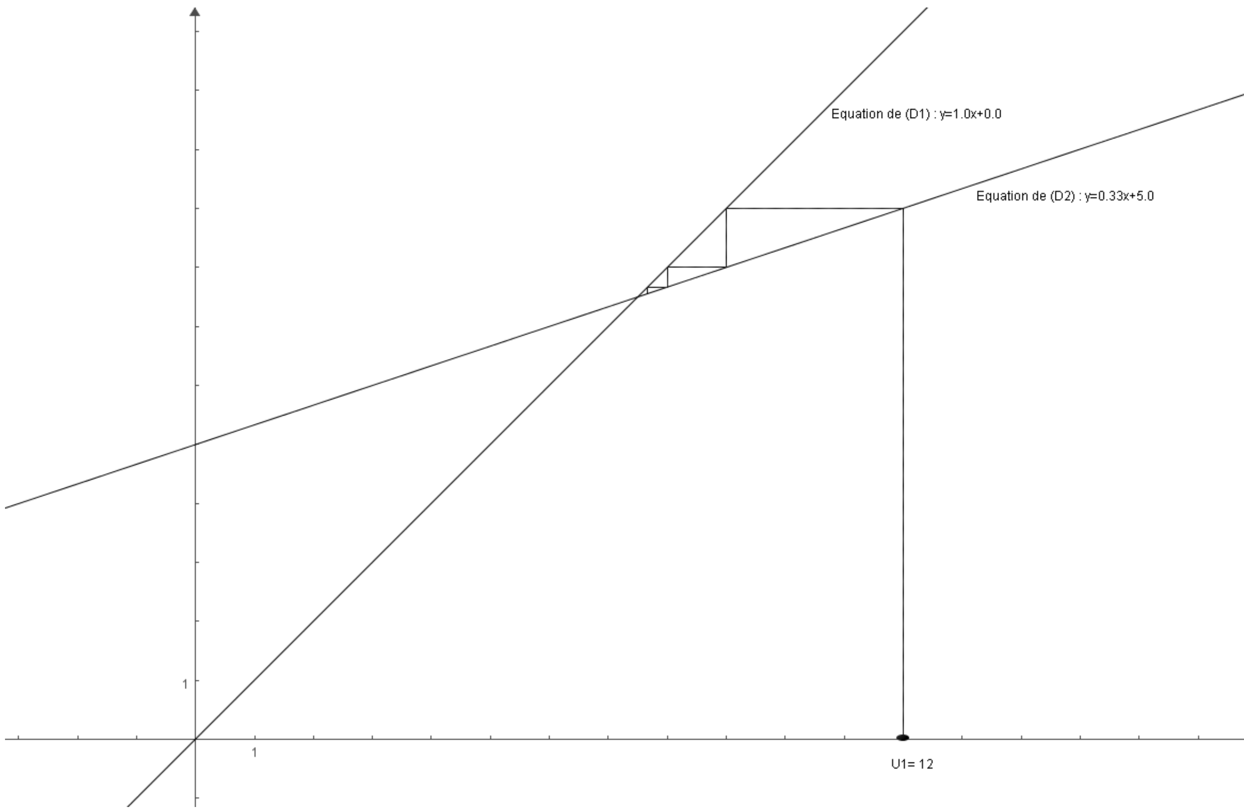

Fig. 2 – suite récurrente

La suite (u_n) semble converger, nous pouvons faire la conjecture suivante :

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 7,5$$

Question 2.
Pour tout n entier naturel n $\geq$1, on définit la suite (v_n)par : v_n= u_n - $\frac{15}{2}$

Question 2.a.

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - \tfrac{15}{2} \\ &= \tfrac{1}{3}u_n + 5 - \tfrac{15}{2} \\ &= \tfrac{1}{3}u_n - \tfrac{5}{2} \\ &= \tfrac{1}{3}(u_n - \tfrac{15}{2}) \\ v_{n+1} &= \tfrac{1}{3}v_n \end{aligned}$$

La suite (v_n) est géométrique de raison q= $\frac{1}{3}$ et de premier terme v_1.
(v_1= 12 - $\frac{15}{2}$ = $\frac{9}{2}$)

Question 2.b. Comme la suite (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$ et de premier terme v_1= $\frac{9}{2}$, nous pouvons exprimer v_n en fonction de n, on a : v_n= $v_1 \times q^{n-1}$. On a donc : v_n= $\frac{9}{2} \times (\frac{1}{3})^{n-1}$. Ce qui nous donne : $\boxed{v_n = \frac{27}{2} \times (\frac{1}{3})^n}$

Question 2.c.

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} v_n = \lim_{n\to+\infty} (\frac{1}{3})^n = 0}$$

car la suite $((\frac{1}{3})^n)_n$ est une suite géométrique de raison q= $\frac{1}{3}$ avec -1 < $\frac{1}{3}$ <1). Nous pouvons à présent en déduire la limite de la suite (U_n) quand n tend vers $+\infty$.

Comme v_n= u_n - $\frac{15}{2}$, nous pouvons écrire :

u_n= v_n + $\frac{15}{2}$, ainsi :

$$\boxed{\lim_{n\to+\infty} u_n = \frac{15}{2}}$$

Remarque : notre conjecture était correcte.

Question 3.a.

$$\begin{aligned}
u_n - \frac{15}{2} \leq 10^{-6} \quad &\Leftrightarrow \quad v_n \leq 10^{-6} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{27}{2} \times (\frac{1}{3})^n \leq 10^{-6} \\
&\Leftrightarrow \quad (\frac{1}{3})^n \leq \frac{2}{27 \times 10^6} \\
&\Leftrightarrow \quad 3^n \geq \frac{27 \times 10^6}{2} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln(3^n) \geq \ln(\frac{27 \times 10^6}{2}) \quad \text{(la fonction ln est croissante sur }]0, +\infty[) \\
&\Leftrightarrow \quad n \times \ln(3) \geq \ln(\frac{27 \times 10^6}{2}) \\
&\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln(\frac{27 \times 10^6}{2})}{\ln(3)} \\
&\Leftrightarrow \quad n \geq 14,94
\end{aligned}$$

Or n est un entier naturel.
Pour $\boldsymbol{n \geq 15}$, nous pouvons affirmer que $u_n - \frac{15}{2} \leq 10^{-6}$

Question 3.b.

$$\begin{aligned}
u_n - \frac{15}{2} \geq 10^{6} \quad &\Leftrightarrow \quad v_n \geq 10^{6} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{27}{2} \times (\frac{1}{3})^n \geq 10^{6} \\
&\Leftrightarrow \quad (\frac{1}{3})^n \geq \frac{2 \times 10^6}{27} \\
&\Leftrightarrow \quad 3^n \leq \underbrace{\frac{27}{2 \times 10^6}}_{=13,5 \times 10^{-6}}
\end{aligned}$$

Or n est un entier naturel supérieur ou égal à 1 donc $3^n \geq 3$.
Nous ne pouvons pas déterminer n de sorte que $u_n - \frac{15}{2} \geq 10^6$

Exercice 2 : (non spécialité)

Partie A

Question 1.

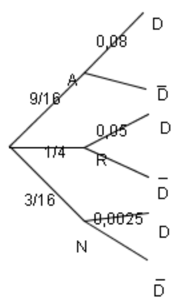

FIG. 3 – arbre

Question 2.

On cherche P(R $\cap$D)

Par définition, P_R(D)= $\frac{P(R \cap D)}{P(R)}$ donc P(R $\cap$ D)=P_R(D) $\times$ P(R).

Numériquement, $\boxed{P(R \cap D) = 0,05 \times \frac{1}{4} = 0,0125}$

Question 3.

Les évenements A,R et N forment une partition de Ω, d'après la ***formule des probabilités totales***, nous avons : P(D)= P(D $\cap$ A)+ P(D $\cap$ R)+ P(D $\cap$ N).

Nous avons P(D $\cap$ A)=P_A(D) $\times$ P(A)=0,08 $\times$ $\frac{9}{16}$= 0,045
et P(D $\cap$ N)=P_N(D) $\times$ P(N)=0,0025 $\times$ $\frac{3}{16}$= 0,000469
et P(R $\cap$ D) a été calculé précedemment.

Nous obtenons : $\boxed{P(D) = 0,058}$ (valeur arrondie à 10^{-4} près).

Question 4.

On cherche $P_{\bar{D}}$(N) = $\frac{P(N \cap \bar{D})}{P(D)}$.
Calculons tout d'abord P(N $\cap$ $\bar{D}$).

Nous avons : P_N(D)+ $P_N(\bar{D})$ = 1
donc $P_N(\bar{D})$= 1 - P_N(D)= 1 - 0,0025 = 0,9975.

Or, P(N $\cap$ $\bar{D}$)= P$_N$($\bar{D}$) $\times$ P(N) donc P(N $\cap$ $\bar{D}$)= O,9975 $\times$ $\frac{3}{16}$.
Nous avons : P$_{\bar{D}}$(N) $= \frac{O{,}9975\times\frac{3}{16}}{1-0{,}058}$

Arrondie à 10^{-4} près : $\boxed{P_{\bar{D}}(N) = 0,1985}$

Partie B

Chaque camion neuf a (de façon indépendante) une probabilité d'indisponibilité de 0,01.

Notons X la variable aléatoire égale au nombre de camions neufs indisponibles parmi les trois camions neufs.

Il est clair que X suit une ***loi binomiale de paramètres n=3 et p= 0,01.***

Question 1.

Notons I l'événement : "camion indisponible" et notons $\bar{I}$ l'événement contraire de I.

Déterminons P(T) : P(T)= P(X=3)= P(I)^3=p^3= 10^{-6} = 0,000001.

Arrondie au millième : $\boxed{P(T) = 0}$

Question 2.

Déterminons P(M) : P(M)= P(X $\geq$ 1)= 1- P(X=0)= 1 -P($\bar{I}$)^3= 1- 0,99^3.

Arrondie au millième : $\boxed{P(M) = 0,030}$

Question 3.

Si deux camions sont disponibles, cela signifie qu'un seul camion est indisponible.

On a : P(S)= P(X=1)= 3 $\times$ P(I) $\times$ P($\bar{I}$)^2 = 3 $\times$ 0,01 $\times$ 0,99^2.

Arrondie au millième : $\boxed{P(S) = 0,029}$

Exercice 3 :

Γ est la courbe représentative d'une fonction g. Γ passe par les points O et A de coordonnées respectives (0 ; 0) et (2 ; 2)

Question 1.

Γ passe par O : $\boxed{g(0) = 0}$

Γ passe par A : $\boxed{g(2) = 2}$

Soit (T_1) la tangente à la courbe Γ au point C d'abscisse 1. La droite (T_1) est parallèle à l'axe des abscisses : $\boxed{g'(1) = 0}$.

Soit (T_2) la tangente à la courbe Γ au point A d'abscisse 2. g'(2) est le coefficient directeur de la tangente (T_2). Prenons deux points appartenant à la droite (T_2), par exemple : les points A et B de coordonnées respectives (2 ; 2) et (4 ; 0).

on a : g'(2)= $\frac{0-2}{4-2}$ = -1. On a donc : $\boxed{g'(2) = -1}$.

<u>Question 2.</u>

* <u>choix de la courbe associée à la fonction g'</u> :

Nous savons que g'(1)= 0 et g'(2)= -1.
Notons $C_{g'}$ la courbe représentative de la fonction g'. $C_{g'}$ passe donc par les points de coordonnées respectives (1 ; 0) et (2 ; -1).
Ce qui est le cas de la courbe 2.

<u>Conclusion :</u> ***La courbe associée à la fonction g' est la courbe 2.***

* <u>choix de la courbe associée à la fonction G</u> :

Si G est une primitive de g : G'(x)= g(x).

Regardons la courbe Γ :

Γ est au dessus de l'axe des abscisses pour x ≥ 0 :g(x) ≥0 pour x ≥ 0.
Γ est au dessous de l'axe des abscisses pour x ≤ 0 :g(x) ≤0 pour x ≤ 0.

On peut écrire : G'(x) ≤ 0 pour x ≤ 0 et G'(x) ≥ 0 pour x ≥ 0

et donc G est décroissante sur]-∞,0] et croissante sur [0,+ ∞[.

Nous remarquons que seule la courbe 4 convient.

<u>Conclusion :</u> ***La courbe associée à la fonction G est la courbe 4.***

<u>Question 3.</u>

g est définie par : g(x)= (x + a) e^{bx+c} où a, b et c sont trois réels.

<u>Question 3.a.</u>

g(0)=0 d'après la question 1.

0r g(0) = a e^c, donc a e^c = 0.

Or, pour tout réel c, $e^c \neq 0$ (car $e^c > 0$).

Donc $\boxed{a = 0}$.

g(2)=2 d'après la question 1.
or g(2) = (2 + a) e^{2b+c}, donc (2 + a) e^{2b+c} = 2.

Or, a est nul donc 2 e^{2b+c} = 2 donc e^{2b+c} = 1.

Donc 2b + c = 0 car 1= e^0 et donc $\boxed{c = -2b}$.

Nous pouvons écrire : $\boxed{g(x) = xe^{bx-2b}}$

<u>Question 3.b.</u>

g est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

Pour tout x réel, g'(x)= e^{bx-2b} + xbe^{bx-2b} donc $\boxed{g'(x) = (xb+1)e^{bx-2b}}$.

<u>Question 3.c.</u>

g'(1)=0 d'après la question 1.
Or g'(1)= (b + 1) e^{-b}. Et comme pour tout réel b, e^{-b} est non nul, alors b+1= 0 et donc b= -1 et par conséquent c= 2.

$$\boxed{g(x) = xe^{2-x}}$$

<u>Question 4.</u>

Pour démontrer que G (définie par G(x)= - (x+1) e^{2-x}) est une primitive de g sur $\mathbb{R}$, il suffit de prouver que : pour tout x $\in \mathbb{R}$, G'(x)= g(x).

Calculons G'(x) pour tout réel x.

G est de la forme : G(x)= u(x)v(x) où u(x)= - x - 1 et v(x)= e^{2-x}.

On a u'(x)= -1 et v'(x)= - e^{2-x}.

$$\begin{aligned}
G'(x) &= u'(x)v(x) + u(x)v'(x) \\
&= -e^{2-x} + (x+1)e^{2-x} \\
&= (-1+x+1)e^{2-x} \\
&= xe^{2-x} \\
G'(x) &= g(x)
\end{aligned}$$

G est bien une primitive de g sur $\mathbb{R}$.

Question 5.

Γ est au dessus de l'axe des abscisses pour x $\in$ [2 ;3] donc pour x $\in$ [2 ;3] g(x) $>$ 0.

Notons D le domaine délimité par l'axe des abscisses, la courbe Γ et les droites d'équation x= 2 et x= 3.
Notons K l'aire de ce domaine D (en unités d'aire : u.a)

$$\begin{aligned}
K &= \int_2^3 g(x)\,dx \\
&= G(3) - G(2) \qquad \text{(G est une primitive de g sur } \mathbb{R}) \\
K &= 3 - 4e^{-1} \qquad \text{(en u.a)}
\end{aligned}$$

Exercice 4 :

On ne demande pas de justifier, mais je justifie un minimum pour la bonne compréhension du lecteur.

Question 1.

$$\begin{aligned}
f(x) &= x(1+e^{-x}) + 1 \\
&= x + xe^{-x} + \ln e \\
&= xe^{x}e^{-x} + xe^{-x} + \ln e \\
&= \ln e + e^{-x}(x + xe^{x})
\end{aligned}$$

■ ***Réponse a***

Question 2.

$$\begin{aligned} g[u(-1)] &= g(2) \\ &= -1 \end{aligned}$$

■ ***Réponse a***

Question 3.

$$\lim_{x\to+\infty} u(x) = +\infty$$

et

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

et donc

$$\lim_{x\to+\infty} g[u(x)] = +\infty$$

(voir limite de fonction composée)

■ ***Réponse c***

Question 4.

g est croissante sur]-∞ ;-2] et g(-2)=0 donc l'équation g(x)=3 n'a pas de solution sur cet intervalle. De même, g est décroissante sur [-2 ; 2] et g(-2)=0 et g(2)= -1 donc l'équation g(x)=3 n'a pas de solution sur cet intervalle. De plus, g est continue et strictement croissante sur [2 ;+∞[, et g(2)<0 et

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$$

donc l'équation g(x)= 3 a une unique solution sur [2 ;+∞[donc l'équation g(x)= 3 a une unique solution sur [-3 ;+∞[

■ ***Réponse b***

Question 5.

■***Réponse c*** : c'est du cours.

Question 6.

on a g'(x)= -2x e$^{-x^2+1}$, par conséquent :

■***Réponse b***

Question 7.

sur [3 ; 5], f(x)>0 donc F'(x)>0 sur [3 ; 5] donc F est croissante sur [3 ; 5]

■***Réponse c***

Question 8.

les réponses b et c ne sont pas possibles,il reste la réponse a. Pour en être sûr, il faudrait démontrer que :

$$\lim_{x \to +\infty} [f(x) - (x+1)] = 0$$

■***Réponse a***

Question 9.

■***Réponse b*** : c'est du cours

Question 10.

$$\begin{aligned} \ln a + \ln(\tfrac{1}{a} + \tfrac{1}{b}) + \ln b &= \ln a + \ln(\tfrac{a+b}{ab}) + \ln b \\ &= \ln a + \ln(a+b) - \ln(ab) + \ln b \\ &= \ln a + \ln(a+b) - (\ln a + \ln b) + \ln b \\ &= \ln(a+b) \end{aligned}$$

■ ***Réponse b***