TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°1 (2 heures)

Exercice 1 (4 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = (1+x)^3 + x$$

1. Calculer la dérivée g' de g et préciser son signe. En déduire le sens de variation de g sur $\mathbb{R}$.
2. Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1 ; 0]$.
3. Donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

Exercice 2 (12 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par :

$$f(x) = -2x + 1 - \frac{8}{x-3}$$

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. La courbe C_f admet-elle une asymptote horizontale ?
2. Étudier les limites de f en 3^- et en 3^+. La courbe C_f admet-elle une asymptote verticale ?
3. Démontrer que la droite Δ d'équation $y = -2x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$ et en $-\infty$.
4. Calculer la dérivée f' de f. Démontrer que : $f'(x) = -\dfrac{2(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$.
5. En déduire le tableau de variation de f.
6. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $x_0 = 2$.
7. Tracer soigneusement, sur une feuille séparée, Δ, T et C_f.

   Unités graphiques :

   - Axe des abscisses : gradué de -2 à 7 avec 1cm par unité.
   - Axe des ordonnées : gradué de -24 à 12 avec 1cm pour 4 unités.

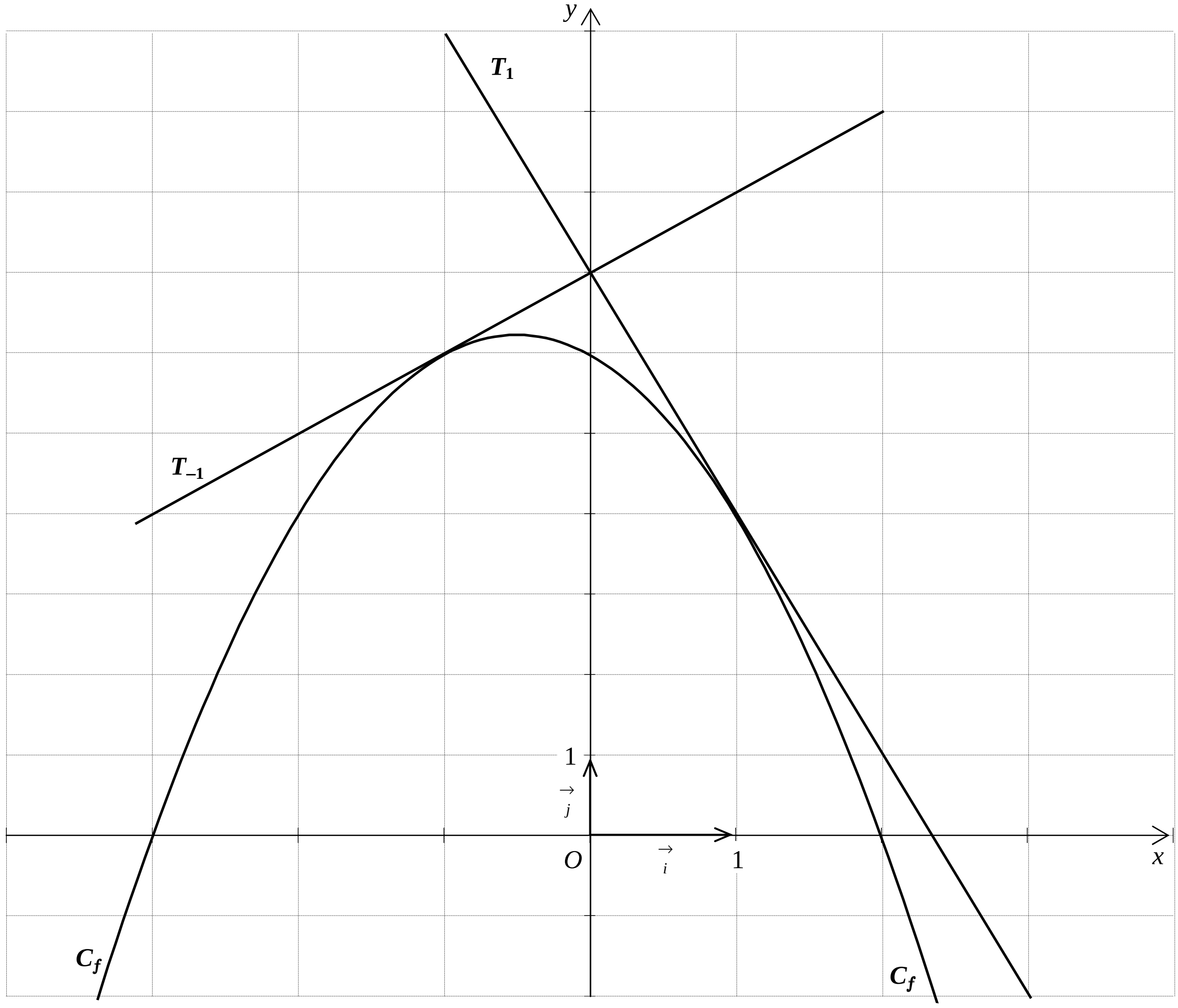
Exercice 3 (4 points)

On dispose d'une courbe C_f représentant une fonction f et de deux de ses tangentes T_1 et T_{-1}.

(Voir graphique ci-contre)

On sait que la fonction f est de la forme : $f(x) = a\,x^2 + bx + c$. (C_f est une parabole)

1. Par lecture graphique, donner la valeur de $f(0)$. En déduire la valeur de c.
2. Exprimer $f'(x)$ en fonction de a et b.
3. Par lecture graphique, donner la valeur des nombres $f'(1)$ et $f'(-1)$. En déduire la valeur de a et b.
4. Par lecture graphique, résoudre l'équation $f(x) = 0$. Retrouver ce résultat par calcul.



y
T_1
T_{-1}
1
$\vec{j}$
O
$\vec{i}$
1
x
C_f
C_f

TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°1 :
CORRIGÉ

Exercice 1 (4 points)

Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = (1 + x)^3 + x$

1. La fonction g est de la forme : $g = u^n + v$ avec : $u(x) = 1 + x$; $n = 3$ et $v(x) = x$.

   Donc $g' = nu'\,u^{n-1} + v'$. Ce qui donne : $g'(x) = 3(1 + x)^2 + 1$.

   Inutile de développer, on a immédiatement : $g'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. (Un carré auquel on ajoute 1 donne une quantité strictement positive)

   La fonction g est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

2. C'est une question classique. Vérifions les trois conditions du théorème de bijection :

   ❋ La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori g est dérivable sur $[-1 ; 0]$.

   ❋ La fonction g est strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc a fortiori g est strictement croissante sur $[-1 ; 0]$.

   ❋ On a : $g(-1) = -1 < 0$ et $g(0) = 1 > 0$. Le réel $\lambda = 0$ est donc bien compris entre $g(-1)$ et $g(0)$.

   D'après le théorème de bijection, on en déduit que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[-1 ; 0]$:

x	$-\infty$	-1	α	0	$+\infty$
signe de la dérivée g'			+		
variations de g		-1	0	1	

3. Encadrement de α d'amplitude 10^{-1} à l'aide d'un petit tableau de valeurs :

x	$-0,9$	$-0,8$	$-0,7$	$-0,6$	$-0,5$	$-0,4$	$-0,3$	$-0,2$	$-0,1$
$g(x)$	$-0,899$	$-0,792$	$-0,673$	$-0,536$	$-0,375$	$-0,184$	$0,043$	$0,312$	$0,629$

Les valeurs de $g(x)$ sont arrondies à 10^{-3}.

   On en déduit : $-0,4 < \alpha < -0,3$

Exercice 2 (12 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\}$ par : $f(x) = -2x + 1 - \dfrac{8}{x-3}$

1. Limite de f en $-\infty$. On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (-2x+1) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{8}{x-3} = 0 \text{ puisque } \lim\limits_{x\to-\infty} (x-3) = -\infty. \end{cases}$$

   Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

   Limite de f en $+\infty$. On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (-2x+1) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{8}{x-3} = 0 \text{ puisque } \lim\limits_{x\to+\infty} (x-3) = +\infty. \end{cases}$$

   Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$.

   Comme les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$ **ne sont pas finies**, la courbe C_f n'admet donc pas d'asymptote horizontale en $+\infty$, ni en $-\infty$.

2. <u>Limite de f en 3^-</u>. On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^-} (-2x+1) = -5 \\ \lim\limits_{x\to 3^-} -\dfrac{8}{x-3} = +\infty \text{ puisque } \lim\limits_{x\to 3^-} (x-3) = 0^-. \end{cases}$$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x) = +\infty$.

<u>Limite de f en 3^+</u>. On a :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} (-2x+1) = -5 \\ \lim\limits_{x\to 3^+} -\dfrac{8}{x-3} = -\infty \text{ puisque } \lim\limits_{x\to 3^+} (x-3) = 0^+. \end{cases}$$

Donc, par somme, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x) = -\infty$.

Comme les limites de f en 3^+ et 3^- sont **infinies**, on en déduit que la courbe C_f admet une asymptote verticale D d'équation $x = 3$.

3. Étudions la différence $f(x) - (-2x + 1)$. ("Écart vertical" entre la courbe C_f et la droite Δ en l'abscisse x).

$$f(x) - (-2x+1) = -2x + 1 - \frac{8}{x-3} - (-2x+1) = -\frac{8}{x-3}$$

Cet "écart vertical" tend vers 0 quand x tend vers $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (-2x+1)] = \lim\limits_{x\to+\infty} -\dfrac{8}{x-3} = 0$

La courbe C_f admet donc une asymptote oblique Δ d'équation $y = -2x + 1$ en $+\infty$.

On a le même résultat en $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} [f(x) - (-2x+1)] = \lim\limits_{x\to-\infty} -\dfrac{8}{x-3} = 0$

La courbe C_f admet donc également une asymptote oblique Δ d'équation $y = -2x + 1$ en $-\infty$.

4. <u>Calcul de la dérivée f' de la fonction f</u> :

La fonction f est de la forme : $f = u - 8 \times \dfrac{1}{v}$ où u et v sont les fonctions définies par $\begin{cases} u(x) = -2x+1 \\ v(x) = x-3 \end{cases}$.

Donc $f' = u' - 8 \times \left(-\dfrac{v'}{v^2}\right) = u' + 8 \times \dfrac{v'}{v^2}$, ce qui donne : $f'(x) = -2 + \dfrac{8}{(x-3)^2}$.

<u>Remarque</u> : on peut aussi réduire $f(x)$ au même dénominateur puis utiliser la formule de la dérivée d'un quotient...

En réduisant au même dénominateur :

$$f'(x) = \frac{8 - 2(x-3)^2}{(x-3)^2} = \frac{8 - 2(x^2 - 6x + 9)}{(x-3)^2} = \frac{-2x^2 + 12x - 10}{(x-3)^2}$$

Par ailleurs, on a : $-2(x-5)(x-1) = (10 - 2x)(x-1) = -2x^2 + 12x - 10$. Donc : $f'(x) = -\dfrac{2(x-5)(x-1)}{(x-3)^2}$

5. On en déduit le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		3		5		$+\infty$
signe de -2		$-$		$-$		$-$		$-$	
signe de $(x-5)$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $(x-1)$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
signe de $(x-3)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
signe de la dérivée f'		$-$	0	$+$	||	$+$	0	$-$	
variations de f	$+\infty$	$\searrow$	3	$\nearrow$	$+\infty$ || $-\infty$	$\nearrow$	-13	$\searrow$	$-\infty$

<u>Justification des signes</u> :

$x - 5 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 5$

$x - 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 1$

Un carré est positif ou nul

Ne pas oublier de compléter le tableau de variation avec les **valeurs des limites et des éventuels extremums**

La fonction f admet un maximum relatif en 5 : $f(5) = -13$.

La fonction f admet un minimum relatif en 1 : $f(1) = 3$.

6. L'équation de la tangente T au point d'abscisse 2 est donnée par la formule :

$$T_2 : y = f(2) + f'(2)(x - 2)$$

La formule générale est : $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$

Or, $f(2) = 5$ et $f'(2) = 6$.

D'où : $$T_2 : y = 6x - 7$$

7. **Veuillez refaire soigneusement le graphique chez vous puis me le rendre pour le Jeudi 4 Octobre 2001**

En tenant compte des conseils suivants :

- Respecter les unités graphiques.
- Tracer les deux asymptotes (l'oblique Δ et la verticale)
- Tracer la tangente T.
- Pour tracer C_f, soyez généreux et calculez de nombreuses valeurs avec la calculette (Vous pouvez utiliser le menu "TABLE"). Marquez d'une croix légère au crayon tous les points calculés. Lorsque vous dessinez C_f, veillez à bien représenter le comportement asymptotique (C_f doit s'approcher de ses asymptotes). Veillez également à ce que la droite T soit bien tangente à C_f au point d'abscisse 2.
- Représenter par une double flèche les tangentes horizontales à C_f. (Les coordonnées des points correspondants sont visibles dans le tableau de variation)
- Enfin, utilisez des couleurs différentes !

Exercice 3 (4 points)

On dispose d'une courbe C_f représentant une fonction f et de deux de ses tangentes T_1 et T_{-1}.

(Voir graphique ci-contre)

On sait que la fonction f est de la forme : $f(x) = a\,x^2 + bx + c$. (C_f est une parabole)

1. $f(0) = 6$. Par ailleurs, $f(0) = c$. Donc $c = 6$.
2. $f'(x) = 2ax + b$.
3. $f'(1)$ = coefficient directeur de la tangente $T_1 = -3$. $f'(-1)$ = coefficient directeur de la tangente $T_{-1} = 1$.

   Par ailleurs, d'après la question 2, on a : $f'(1) = 2a + b$ et $f'(-1) = -2a + b$.

   En résolvant le petit système $\begin{cases} 2a + b = -3 \\ -2a + b = 1 \end{cases}$, on trouve facilement $a = -1$ et $b = -1$.

   On a donc déterminé la fonction f : $f(x) = -x^2 - x + 6$.
4. Les solutions de l'équation $f(x) = 0$ sont les abscisses des points d'intersection de C_f avec l'axe (Ox).

   Graphiquement, on trouve deux solutions : $x_1 = -3$ et $x_2 = 2$. Donc $S = \{-3 ; 2\}$.

   Pour retrouver ce résultat par calcul, on résout l'équation $-x^2 - x + 6 = 0$. Allez, tout le monde sait le faire, je vais me coucher !

TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ (spécialité)

Exercice 1 (3 points)

Dans cet exercice, on évalue votre capacité à placer des points dans un repère de l'espace. On évalue également votre capacité à déterminer une équation d'un plan connaissant trois de ses points ou connaissant un de ses points et un vecteur normal. Les méthodes ont été vues en cours. Cet exercice ne doit poser aucune difficulté.

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points :

$$A(0 ; 2 ; 5), B(3 ; 0 ; 5) \text{ et } C(3 ; 2 ; 0)$$

1. Placer les points dans le repère. (On dessinera le repère avec des unités au choix)
2. Déterminer une équation du plan (ABC).
3. Déterminer une équation du plan (P) passant par C et de vecteur normal $\overrightarrow{AB}$.

Exercice 2 (7 points)

Cet exercice étudie la position relative de deux plans suivant différentes valeurs d'un paramètre α. Les différents cas ont été étudiés en T.D. Les élèves qui ont repris ces exercices chez eux ne doivent pas rencontrer de difficultés particulières. Cet exercice est de niveau BAC

On considère les deux plans (P) et (Q) dont les équations sont données ci-dessous :

$(P) : x + 3y - z + 1 = 0$

$(Q) : 2x + 6y + \alpha z + 5 = 0$

1. Donner un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (P) et un vecteur normal $\vec{m}$ au plan (Q).
2. Comment choisir α pour avoir (P) et (Q) perpendiculaires ?
3. Comment choisir α pour avoir (P) et (Q) parallèles ? Les plans (P) et (Q) sont-ils alors confondus ?
4. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 1$. Les plans (P) et (Q) sont donc sécants suivant une droite (D).

   Résoudre le système $\begin{cases} x + 3y - z + 1 = 0 \\ 2x + 6y + z + 5 = 0 \end{cases}$.

   Déterminer deux points A et B de la droite (D). En déduire un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite (D).

Exercice 3 (4 points)

Dans cet exercice, on vous demande de résoudre un système de trois équations à trois inconnues. L'énoncé précise qu'il y a un seul triplet solution ("les trois plans se coupent en un unique point A"). Vous avez le libre choix de la méthode (substitution, combinaison, ...). Aucune difficulté à prévoir, si ce n'est les erreurs de calculs ! Pensez à vérifier votre solution !

On considère trois plans (P), (Q) et (R) dont les équations sont données ci-dessous :

$(P) : 2x - y + 3z - 1 = 0$

$(Q) : 3x + 2y - z + 2 = 0$

$(R) : x - 3y + 2z - 3 = 0$

On admet que ces trois plans se coupent en unique point A. Déterminer les coordonnées de A.

Exercice 4 (2 points)

Soit (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et (D) une droite de vecteur directeur $\vec{v}$.

1. Dans cette question, on suppose que la droite (D) est parallèle au plan (P). Que vaut $\vec{n} \cdot \vec{v}$? Illustrer.
2. On suppose maintenant que $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$. Que peut-on en déduire sur la position relative de la droite (D) et du plan (P) ? Illustrer.

Cet exercice évalue vos connaissances sur les notions de vecteur normal à un plan et de vecteur directeur d'une droite. Il teste également votre aptitude à illustrer de façon pertinente une situation donnée.

Cet exercice, en principe très facile, teste votre vision dans l'espace. Il n'y a aucun calcul à faire mais simplement expliquer de la façon la plus convaincante possible votre point de vue.

Exercice 5 (4 points)

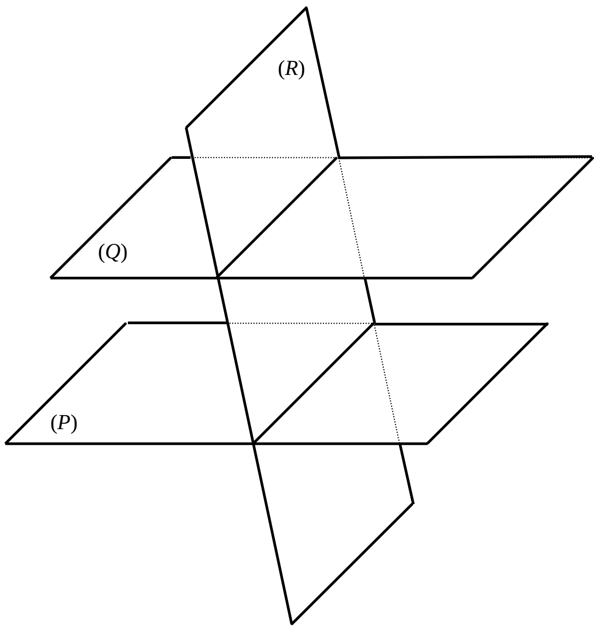
Le but de cet exercice est d'étudier les différentes positions relatives de trois plans dans l'espace.

On note S le système constitué des équations des trois plans (P), (Q) et (R).

Examiner chacune des quatre situations ci-dessous et indiquer (par une brève explication) si le système S admet aucun, un seul ou une infinité de triplet(s) solution(s).

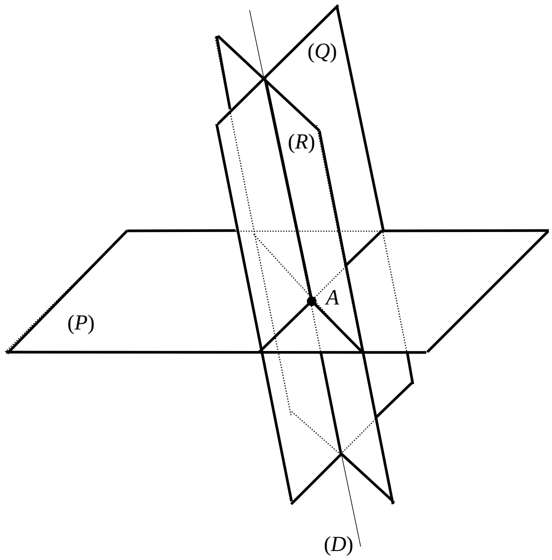
SITUATION A

Plan (R) sécant à deux plans (P) et (Q) strictement parallèles



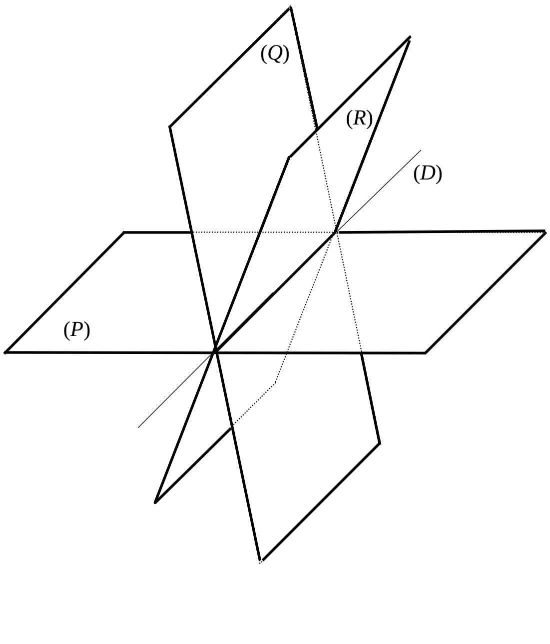
SITUATION B :

Deux plans (Q) et (R) sécants suivant une droite (D) elle-même sécante à un plan (P)



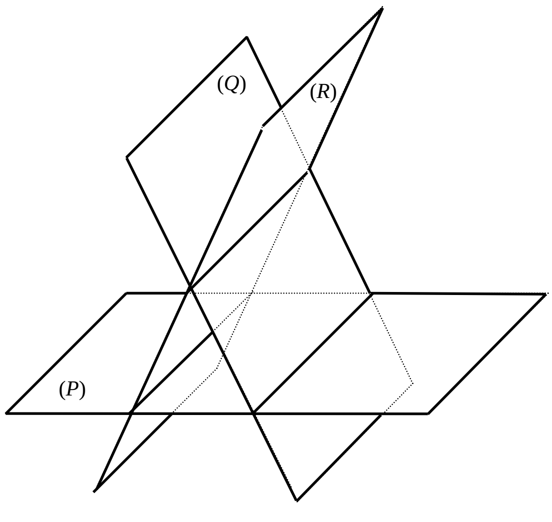
SITUATION C

Trois plans sécants suivant une même droite (D)



SITUATION D

Trois plans sécants deux à deux suivant trois droites strictement parallèles



TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ (spécialité)
Corrigé

Exercice 1 (3 points)

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ de l'espace, on considère les points :

$$A(0 ; 2 ; 5),\ B(3 ; 0 ; 5) \text{ et } C(3 ; 2 ; 0)$$

1. Cette question n'a pas posé de problème.
2. Une équation (cartésienne) du plan (ABC) est de la forme :

$$ax + by + cz + d = 0 \qquad \text{(avec } a, b \text{ et } c \text{ non tous nuls)}$$

Comme $A(0 ; 2 ; 5)$ est dans le plan (ABC), ses coordonnées vérifient l'équation :

$$ax_A + by_A + cz_A + d = 0$$

$$2b + 5c + d = 0$$

En exploitant les conditions $B \in (ABC)$ et $C \in (ABC)$, on obtient de même :

$$3a + 5c + d = 0 \quad \text{et} \quad 3a + 2b + d = 0$$

Par ailleurs, nous savons que les coefficients a, b, c et d sont définis à un facteur près. Nous pouvons donc fixer arbitrairement $a = 1$. Il nous reste alors trois équations à trois inconnues :

$$\begin{cases} 2b + 5c + d = 0 & (E_1) \\ 3 + 5c + d = 0 & (E_2) \\ 3 + 2b + d = 0 & (E_3) \end{cases}$$

Résolvons ce système.

En effectuant $(E_1) - (E_2)$, nous obtenons : $2b - 3 = 0$ d'où $b = \frac{3}{2}$.

Remplaçons b par $\frac{3}{2}$ dans (E_3) : $3 + 3 + d = 0$ d'où $d = -6$.

Remplaçons d par (-6) dans (E_2) : $3 + 5c - 6 = 0$ d'où $c = \frac{3}{5}$.

Une équation du plan (ABC) est donc : $\quad x + \frac{3}{2}y + \frac{3}{5}z - 6 = 0$

Et en multipliant tous les coefficients par 10, nous obtenons :

$$(ABC) : 10x + 15y + 6z - 60 = 0$$

3. On sait que : $\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{vmatrix}$. Ce qui donne : $\overrightarrow{AB} \begin{vmatrix} 3 \\ -2 \\ 0 \end{vmatrix}$.

Nous savons que le vecteur $\vec{n} \begin{vmatrix} a \\ b \\ c \end{vmatrix}$ est normal au plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.

Donc tout plan (P) d'équation $3x - 2y + d = 0$ admet bien $\overrightarrow{AB}$ comme vecteur normal.

Pour déterminer d, on exploite la condition $C \in (P)$:

$$3x_C - 2y_C + d = 0$$

$$9 - 4 + d = 0$$

$$d = -5$$

D'où une équation du plan (P) : $3x - 2y - 5 = 0$

Exercice 2 (7 points)

On considère les deux plans (P) et (Q) dont les équations sont données ci-dessous :

$(P) : x + 3y - z + 1 = 0$

$(Q) : 2x + 6y + \alpha z + 5 = 0$

1. Un vecteur normal $\vec{n}$ au plan (P) est $\vec{n}\begin{vmatrix}1\\3\\-1\end{vmatrix}$ et un vecteur normal $\vec{m}$ au plan (Q) est $\vec{m}\begin{vmatrix}2\\6\\\alpha\end{vmatrix}$.
2. Nous savons que les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires si et seulement si leurs vecteurs normaux sont orthogonaux, c'est-à-dire si et seulement si $\vec{n}\cdot\vec{m} = 0$.

   Or : $\vec{n}\cdot\vec{m} = 2 + 18 - \alpha = 20 - \alpha$.

   On a donc $\vec{n}\cdot\vec{m} = 0$ si et seulement si $\alpha = 20$.

   Conclusion : pour que les plans (P) et (Q) soient perpendiculaires, nous devons choisir $\alpha = 20$.
3. Nous savons que (P) et (Q) sont parallèles si et seulement si leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

   Soit k un réel tel que $\vec{m} = k\,\vec{n}$ (s'il existe). C'est à dire, tel que :

$$\begin{cases} 2 = k \\ 6 = 3k \\ \alpha = -k \end{cases}$$

   D'après les deux premières lignes, on a nécessairement $k = 2$. D'où $\alpha = -2$.

   Conclusion : pour que les plans (P) et (Q) soient parallèles, nous devons choisir $\alpha = -2$.

   Examinons maintenant si (P) et (Q) sont confondus. (Dans le cas $\alpha = -2$)

   Pour cela, on détermine un point A du plan (P) et on teste si A est dans (Q).

   Soit $A(0\ ;\ 0\ ;\ \lambda)$ un point de P, on a alors : $-\lambda + 1 = 0$, d'où $\lambda = 1$. Ainsi, le point $A(0\ ;\ 0\ ;\ 1)$ est dans (P).

   Or, $2\times0 + 6\times0 - 2\times1 + 5 = 3 \neq 0$, donc $A \notin (Q)$.

   Le plan (P) est parallèle à (Q) et contient un point A n'appartenant pas à (Q) donc :

   (P) et (Q) sont strictement parallèles
4. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 1$. Les plans (P) et (Q) sont donc sécants suivant une droite (D).

   Résolvons le système $\begin{cases} x + 3y - z + 1 = 0 & (E_1) \\ 2x + 6y + z + 5 = 0 & (E_2) \end{cases}$.

   En effectuant $(E_1) + (E_2)$: $3x + 9y + 6 = 0$ d'où $x = -3y - 2$.

   En remplaçant x par $(-3y - 2)$ dans (E_1) : $-3y - 2 + 3y - z + 1 = 0$ d'où $z = 1$. (z est donc constant)

   On en déduit : $S = \{(-3y - 2\ ;\ y\ ;\ -1)\ ;\ y \in \mathbb{R}\}$ (infinité de triplets solutions)

   On obtient les coordonnées des points de la droite (D) en attribuant une valeur à y dans S.

   Avec $y = 0$, on obtient : $A(-2\ ;\ 0\ ;\ -1)$

   Avec $y = 1$, on obtient : $B(-5\ ;\ 1\ ;\ -1)$.

   D'où $\overrightarrow{AB}\begin{vmatrix}-3\\1\\0\end{vmatrix}$. Un vecteur directeur $\vec{v}$ de la droite (D) est donc : $\vec{v}\begin{vmatrix}-3\\1\\0\end{vmatrix}$.

Exercice 3 (4 points)

On résout le système : $\begin{cases} 2x - y + 3z - 1 = 0 & (E_1) \\ 3x + 2y - z + 2 = 0 & (E_2) \\ x - 3y + 2z - 3 = 0 & (E_3) \end{cases}$

Procédons par substitution. Avec (E_1), exprimons y en fonction de x et z :

$$y = 2x + 3z - 1 \quad (E_4)$$

En remplaçant dans (E_2) et (E_3), on obtient :

$$\begin{cases} 7x + 5z = 0 & (E_5) \\ -5x + 7z = 0 & (E_6) \end{cases}$$

Ce système a une solution unique (c'est l'énoncé qui l'affirme). Cette solution est triviale : $(x ; z) = (0 ; 0)$.

En remplaçant dans (E_4), on obtient : $y = -1$

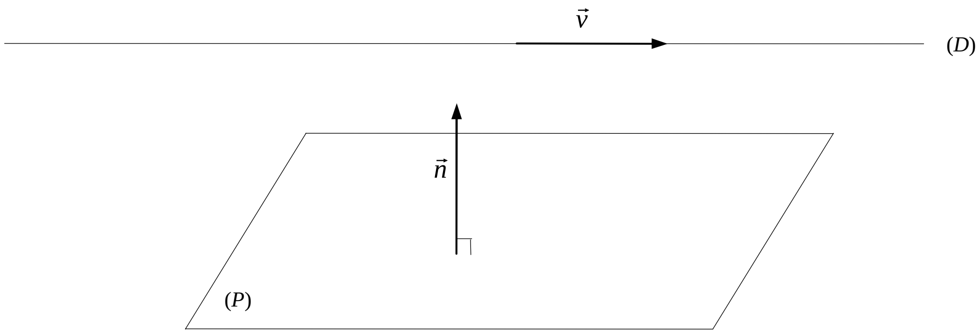
D'où : $S = \{(0 ; -1 ; 0)\}$

Les coordonnées du point A sont : $A(0 ; -1 ; 0)$

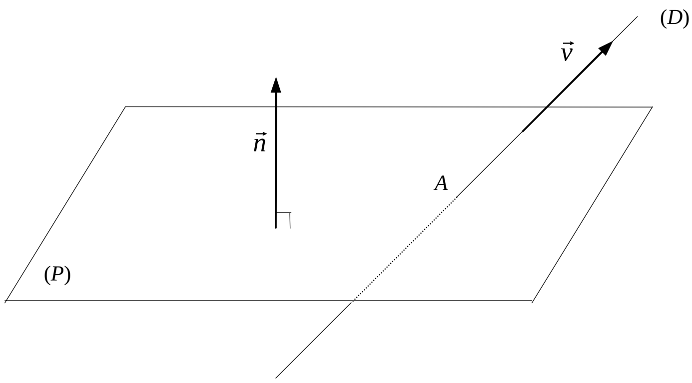
Exercice 4 (2 points)

Soit (P) un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et (D) une droite de vecteur directeur $\vec{v}$.

1. Si la droite (D) est parallèle au plan (P) alors les vecteurs $\vec{n}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux. Donc $\vec{n} \cdot \vec{v} = 0$.



2. Si $\vec{n} \cdot \vec{v} \neq 0$ alors la droite (D) et le plan (P) sont sécants (en un point).



Exercice 5 (4 points)

SITUATION A : comme les plans (P) et (Q) sont strictement parallèles, ils n'ont aucun point en commun. Il n'y a donc, a fortiori, aucun point en commun aux trois plans (P), (Q) et (R). Le système S n'admet donc aucun triplet solution.

SITUATION B : il n'y a qu'un seul point en commun aux trois plans (à savoir le point A). Donc le système S admet un seul triplet solution (correspondant aux coordonnées de A)

SITUATION C : il y a une infinité de points communs aux trois plans (à savoir, tous les points de la droite (D)). Le système S admet donc une infinité de triplets solutions (qui correspondent aux coordonnées des points de (D)).

SITUATION D : il n'y a aucun point en commun aux trois plans, donc S n'admet aucun triplet solution.

TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°2 (2 heures)

Exercice 1 (4 points)

Résoudre l'inéquation :

$$\ln(2x+1)+\ln(x-3) \leqslant \ln(x+5)$$

Exercice 2 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\,;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln x$$

On note C_f sa représentation graphique.

1. Étude des limites de f et du comportement asymptotique de C_f.
   a) Étudier la limite de f en 0^+. La courbe C_f admet-elle une asymptote verticale ?
   b) Étudier la limite de f en $+\infty$. La courbe C_f admet-elle une asymptote horizontale ?
2. Étude du sens de variation de f
   a) Calculer la dérivée f' de la fonction f.
   b) En déduire que :
   $$f'(x) = \frac{x-1}{x} \quad \text{pour tout } x \in\ ]0\,;+\infty[$$
   c) Dresser le tableau de variation de la fonction f.
3. Représentation graphique.
   a) Tracer, très soigneusement C_f ainsi que la droite D d'équation $y = x - 1$.
   Unités graphiques : 2 cm par unité sur chaque axe
   b) Résoudre l'équation $f(x) = x - 1$. Représenter sa (ou ses) solution(s) sur le graphique.

Exercice 3 (8 points) *Comparaison de deux ajustements affines : droite de Mayer et droite de régression*

Une entreprise fabrique huit types de produits. Pour chaque produit, elle dépense des sommes différentes en publicité. Le tableau ci-dessous donne, pour chaque produit, le budget mensuel alloué à la publicité (en €) ainsi que le nombre de commandes faites en un mois à l'entreprise.

Produit	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6	P_7	P_8
X = budget mensuel alloué à la publicité (en €)	5100	7800	11200	15800	20100	22500	26200	28900
Y = nombre de commandes en un mois	620	1080	1480	2020	3000	3360	3880	4200

Sauf mention contraire, tous les calculs pourront être effectué à la calculatrice (les arrondis éventuels seront précisés à chaque question)

1. Représenter le nuage de points associé à la série statistique (X, Y).
   Unités graphiques :
   - En abscisses : 1 cm pour 1000 euros.
   - En ordonnées : 1cm pour 200 commandes.

   On prendra pour origine le point (5000 ; 600).

2. Déterminer les coordonnées du point moyen G de ce nuage de points. Placer G sur le graphique.
3. Déterminer le coefficient de corrélation linéaire entre X et Y. (On arrondira à 10^{-3}). Un ajustement affine est-il justifié ?
4. Un premier ajustement affine : la droite de Mayer

   Dans cette question, on considère deux sous-nuages : celui constitué des points correspondants aux produits P_1, P_2, P_3 et P_4 et celui constitué des points correspondants aux produits P_5, P_6, P_7 et P_8.

   a) Calculer les coordonnées des points moyens G_1 et G_2 des deux sous-nuages. Placer les points G_1 et G_2 sur le graphique.

   b) Démontrer qu'une équation de la droite (G_1G_2) sous la forme $y = mx + p$ est :

   $y = 0{,}16x - 295$ (On détaillera les calculs).

   (On arrondira m à 10^{-2} près et p à l'unité près)

   La droite (G_1G_2) s'appelle la "droite de Mayer". Représenter cette droite sur le graphique.

   c) Recopier et compléter le tableau suivant :

X	5100	7800	11200	15800	20100	22500	26200	28900
Y	620	1080	1480	2020	3000	3360	3880	4200
$0{,}16X - 295$								
$Y - (0{,}16X - 295)$								
$[Y - (0{,}16X - 295)]^2$								

   En déduire la somme des résidus quadratiques S associée à la droite Mayer (G_1G_2).

5. Un deuxième ajustement affine : la droite de régression

   a) Déterminer une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés. On notera D cette droite et $y = ax + b$ son équation. Représenter D sur le graphique.

   (On arrondira a à 10^{-3} près et b à l'unité près)

   b) La somme des résidus quadratiques S' associée à la droite de régression D est $S' \simeq 79128$. Laquelle des deux droites (G_1G_2) et D réalise-t-elle le meilleur ajustement affine ?

6. Estimations. À l'aide de l'équation de la droite (D) (ou à défaut celle de (G_1G_2)), et en détaillant les calculs, répondre aux deux questions suivantes :

   a) L'entreprise souhaite commercialiser un produit P_9 pour lequel elle envisage un budget mensuel publicitaire de 23400 €. Quelle estimation peut-on faire du nombre commandes pour ce produit ? (On arrondira à l'unité par défaut)

   b) L'entreprise souhaite vendre 1800 exemplaires par mois d'un produit P_{10}. Quel budget mensuel doit-elle prévoir pour la publicité de ce produit ? (On arrondira à l'euro près par excès)

TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°2
CORRIGÉ

Exercice 1 (4 points)

On considère l'inéquation :

$$\ln(2x + 1) + \ln(x - 3) \leqslant \ln(x + 5)$$

Déterminons les contraintes de cette inéquation. (C'est à dire l'ensemble des réels x pour lesquels l'inéquation est définie). Nous savons que la fonction logarithme est définie sur $]0 ; +\infty[$. Nous devons donc avoir :

$$2x + 1 > 0 \text{ et } x - 3 > 0 \text{ et } x + 5 > 0$$

C'est-à-dire : $$x > -\frac{1}{2} \text{ et } x > 3 \text{ et } x > -5$$

Ce qui s'écrit plus simplement : $\boldsymbol{x > 3}$

Les logarithmes intervenant dans l'inéquation sont donc définis lorsque $x > 3$.

Résolution de l'inéquation : on suppose désormais $x > 3$.

D'après la relation fondamentale du logarithme : $\ln A + \ln B = \ln(AB)$, pour tous réels A et B de $]0 ; +\infty[$ appliquée avec $A = 2x + 1$ et $B = x - 3$ (quantités strictement positives puisque $x > 3$), nous avons :

$$\ln(2x + 1) + \ln(x - 3) = \ln[(2x + 1)(x - 3)]$$

Notre inéquation peut donc s'écrire :

$$\ln[(2x + 1)(x - 3)] \leqslant \ln(x + 5)$$

D'après la propriété : $\ln A \leqslant \ln B \Leftrightarrow A \leqslant B$, pour tous A et B de $]0 ; +\infty[$ appliquée avec $A = (2x + 1)(x - 3)$ et $B = x + 5$ (quantités strictement positives puisque $x > 3$), nous avons :

$$(2x + 1)(x - 3) \leqslant x + 5$$

L'équivalence :
$\ln A \leqslant \ln B \Leftrightarrow A \leqslant B$, pour tous A et B de $]0 ; +\infty[$
traduit la croissance de la fonction logarithme sur $]0 ; +\infty[$

En développant le membre de gauche :

$$2x^2 - 5x - 3 \leqslant x + 5$$

D'où : $$2x^2 - 6x - 8 \leqslant 0$$

En divisant les deux membres par 2 : $$x^2 - 3x - 4 \leqslant 0$$

Le trinôme du second degré $x^2 - 3x - 4$ admet deux racines : $x_1 = -1$ et $x_2 = 4$.

D'où la factorisation : $$(x + 1)(x - 4) \leqslant 0$$

Résolvons cette dernière inéquation (à l'aide d'un tableau de signes) :

x	$-\infty$		-1		4		$+\infty$
signe de $x + 1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x - 4$		$-$		$-$	0	$+$	
signe du produit $(x + 1)(x - 4)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Justification des signes

$x + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant -1$

$x - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 4$

Bilan :

L'ensemble des solutions de l'inéquation $(x + 1)(x - 4) \leqslant 0$ est $[-1 ; 4]$.

L'ensemble S des solutions de l'inéquation $\ln(2x + 1) + \ln(x - 3) \leqslant \ln(x + 5)$ est donc, en tenant compte de la condition $x > 3$: $\boldsymbol{S =]3 ; 4]}$

Exercice 2 (8 points)

On considère la fonction f définie sur $]0\ ;+\infty[$ par :

$$f(x) = x - \ln x$$

On note C_f sa représentation graphique.

1. Étude des limites de f et du comportement asymptotique de C_f.

   a) Nous savons que :

   $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to 0^+} x = 0 \\ \lim\limits_{x \to 0^+} \ln x = -\infty \end{cases}$$

   Donc, par différence : $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$.

   Comme f admet une limite **infinie** en 0, C_f admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

   b) En raisonnant sur l'écriture "$x - \ln x$", nous avons, en $+\infty$, une indétermination du type "$\infty - \infty$". Pour lever cette indétermination, on peut se ramener à un produit, en écrivant :

   $$x - \ln x = x\left(1 - \frac{\ln x}{x}\right)$$

   Nous savons que :

   $$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty \\ \lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = 1 \text{ puisque } \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0 \text{ (limite de référence)} \end{cases}$$

   Donc, par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} x\left(1 - \dfrac{\ln x}{x}\right) = +\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

   Comme la limite de f en $+\infty$ **n'est pas finie**, C_f n'admet pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

2. Étude du sens de variation de f

   a) On a immédiatement : $f'(x) = 1 - \dfrac{1}{x}$.

   b) En réduisant au même dénominateur : $f'(x) = \dfrac{x-1}{x}$ pour tout $x \in\ ]0\ ;+\infty[$

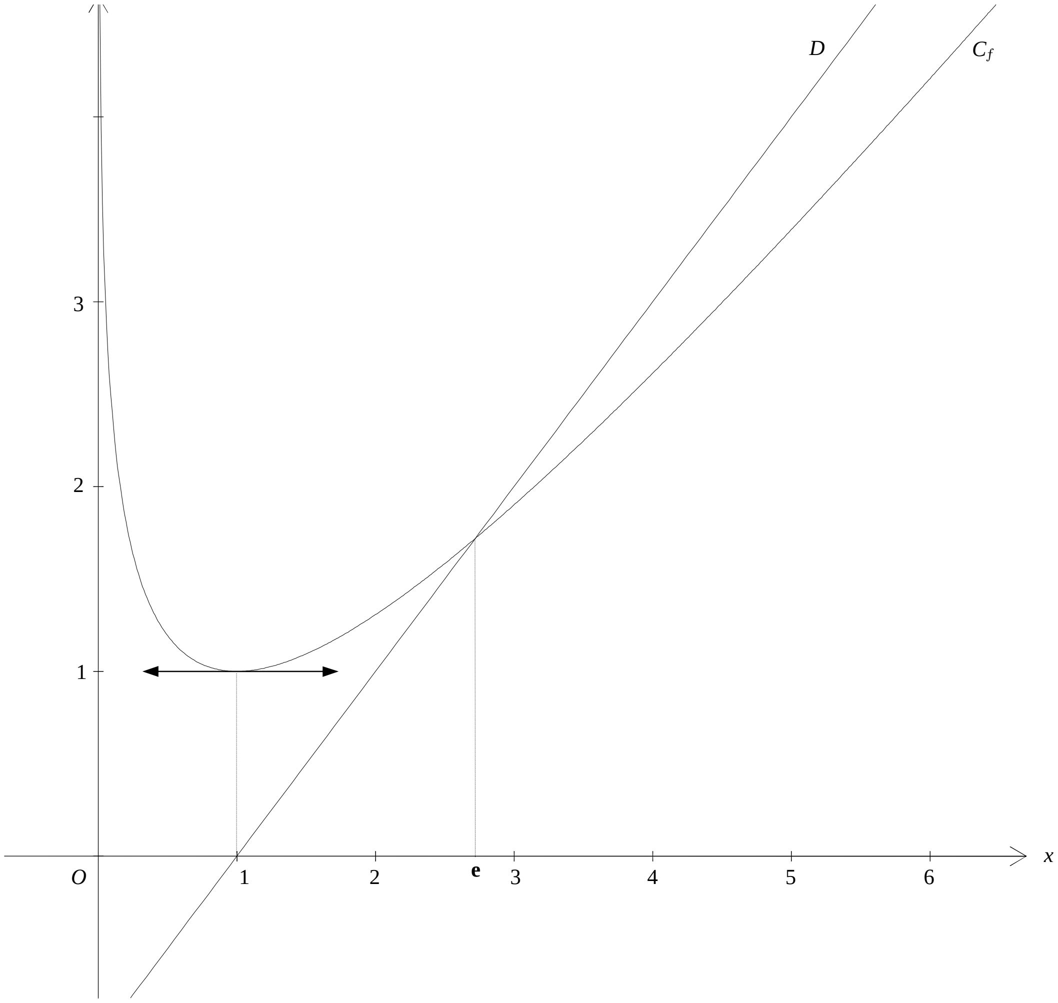
   c) Tableau de variation de la fonction f :

x	0		1		$+\infty$
signe de $x-1$		$-$	0	$+$	
signe de x	0	$+$		$+$	
Signe de f'	‖	$-$	0	$+$	
Variations de f	‖ $+\infty$	↘	1	↗	$+\infty$

   Minimum en 1 : $f(1) = 1 - \ln 1 = 1$

3. Représentation graphique.

   a)



b) L'équation $f(x) = x - 1$ s'écrit : $x - \ln x = x - 1$

C'est-à-dire : $\ln x = 1$

La contrainte de cette équation est $x > 0$.

En remplaçant 1 par ln **e**, on obtient : $\ln x = \ln \mathbf{e}$

D'après la propriété : $\ln A = \ln B \iff A = B$, pour tous A et B dans $]0 ; +\infty[$, on a :

$$x = \mathbf{e}$$

Comme **e** > 0, on a : $S = \{\mathbf{e}\}$

Exercice 3 (8 points) *Comparaison de deux ajustements affines : droite de Mayer et droite de régression*

2. Point moyen du nuage : $G(17200 ; 2455)$
3. Coefficient de corrélation linéaire : $r \simeq 0,997$ (à 10^{-3} près).

   On a : $r^2 \simeq 0,993$ (à 10^{-3} près). Comme $r^2 >> 0,75$, un ajustement affine est largement justifié.
4. a) $G_1(9975 ; 1300)$ et $G_2(24425 ; 3610)$

   b) Équation de la droite (G_1G_2).

   Coefficient directeur : $m = \dfrac{y_{G_2} - y_{G_1}}{x_{G_2} - x_{G_1}} = \dfrac{3610 - 1300}{24425 - 9975} = \dfrac{2310}{14450} \simeq 0,16$ (à 10^{-2}près)

   Ordonnée à l'origine : $p = y_{G_1} - m x_{G_1} = 1300 - \dfrac{231}{1445} \times 9975 \simeq -295$ (à l'unité près)

   D'où : $(G_1G_2) : y = 0,16x - 295$

c)

X	5100	7800	11200	15800	20100	22500	26200	28900
Y	620	1080	1480	2020	3000	3360	3880	4200
$0{,}16X - 295$	521	953	1497	2233	2921	3305	3897	4329
$Y - (0{,}16X - 295)$	99	127	–17	–213	79	55	–17	–129
$[Y - (0{,}16X - 295)]^2$	9801	16129	289	45369	6241	3025	289	16641

D'où $S = 9801 + 16129 + 289 + 45369 + 6241 + 3025 + 289 + 16641 = 97784$.

5. a) Droite de régression de y en x : $y = ax + b$ avec $a \simeq 0{,}154$ (à 10^{-3} près) et $b \simeq -195$ (à l'unité près)

$$y = 0{,}154x - 195$$

b) On sait que la droite de régression D minimise la somme des résidus quadratiques. C'est donc la droite D qui réalise le meilleur ajustement affine.

6. a) Avec $x = 23400$, on trouve : $y = 0{,}154 \times 23400 - 195 = 3408{,}6 \simeq 3408$ (à l'unité près par défaut)

On peut donc estimer qu'il y aura 3408 commandes chaque mois pour ce produit.

b) Avec $y = 1800$, on a : $1800 = 0{,}154x - 195$ d'où $x \simeq 12955$ (à l'euro près par excès)

On peut donc prévoir un budget mensuel de 12955 € pour la publicité de ce produit.

TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°3 (1 heure)
Élèves qui suivent juste l'enseignement obligatoire

Partie PROBABILITÉS (10 points)

Exercice 1 (4 points)

A, B et C sont des événements. On sait que : $p(A) = 0{,}3$; $p(B) = 0{,}5$; $p(A \cap B) = 0{,}2$; $p(\overline{C}) = 0{,}4$.

On sait également que A et C sont incompatibles.

1. Les événements A et B sont-ils incompatibles ?
2. Calculer : $p(C)$; $p(A \cup B)$; $p(A \cup C)$

Exercice 2 (6 points)

Deux joueurs de tennis J_1 et J_2 s'affrontent dans un match en deux sets gagnants.

(Rappel des règles : pour gagner le match, un joueur doit gagner deux sets. Il y a, au plus, trois sets.)

On suppose que :

- la probabilité que le joueur J_1 gagne le 1er set est 0,6
- la probabilité que le joueur J_1 gagne le 2ème set est 0,5
- la probabilité que le joueur J_1 gagne le 3ème set (si il y en a un) est 0,4.

1. Faire un arbre décrivant les différents cas de figure.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :

   A = "le joueur J_1 gagne le match en 2 sets"

   B = "le joueur J_1 perd le match en 2 sets"

   C = "le joueur J_1 gagne au moins un set"

   D = "le joueur J_1 gagne le match"

Partie LOGARITHMES (10 points)

Exercice 3 (4 points)

Simplifier au maximum :

$$\ln(\sqrt{6} - 1) + \ln(\sqrt{6} + 1) - \ln(\sqrt{100}) - \ln(\frac{1}{8})$$

On précisera, à chaque étape, la formule utilisée.

Exercice 4 (4 points)

Résoudre l'équation : $\ln(4x - 3) = \ln(1 + x^2)$

Exercice 5 (2 points)

Dériver la fonction f définie par : $f(x) = \ln(x^2 + 1)$

TES_1 : DEVOIR SURVEILLÉ N°3 (1 heure)
Élèves qui suivent l'enseignement de spécialité

Partie PROBABILITÉS (20 points) (note comptant pour l'enseignement obligatoire)

Exercice 1 (8 points)

A, B et C sont des événements. On sait que : $p(A) = 0{,}3$; $p(B) = 0{,}5$; $p(A \cap B) = 0{,}2$; $p(\overline{C}) = 0{,}4$.

On sait également que A et C sont incompatibles.

1. Les événements A et B sont-ils incompatibles ?
2. Calculer : $p(C)$; $p(A \cup B)$; $p(A \cup C)$

Exercice 2 (12 points)

Deux joueurs de tennis J_1 et J_2 s'affrontent dans un match en deux sets gagnants.

(Rappel des règles : pour gagner le match, un joueur doit gagner deux sets. Il y a, au plus, trois sets.)

On suppose que :

- la probabilité que le joueur J_1 gagne le 1$^{\text{er}}$ set est 0,6
- la probabilité que le joueur J_1 gagne le 2$^{\text{ème}}$ set est 0,5
- la probabilité que le joueur J_1 gagne le 3$^{\text{ème}}$ set (si il y en a un) est 0,4.

1. Faire un arbre décrivant les différents cas de figure.
2. Calculer la probabilité des événements suivants :

   A = "le joueur J_1 gagne le match en 2 sets"

   B = "le joueur J_1 perd le match en 2 sets"

   C = "le joueur J_1 gagne au moins un set"

   D = "le joueur J_1 gagne le match"

Partie SUITES (20 points) (note comptant pour l'enseignement de spécialité)

Exercice 3 (20 points)

Un client d'une banque dispose, au 1$^{\text{er}}$ janvier 2000, d'un capital de 1 000 € qu'il dépose sur un compte.

La banque rémunère à 5% d'intérêts annuels toutes les sommes déposées et verse ces intérêts sur le compte tous les 31 décembre de chaque année.

De plus, le client décide de rajouter 950 € tous les 31 décembre de chaque année.

On désigne par u_n (n entier positif ou nul) le capital disponible après n années écoulées depuis le 1$^{\text{er}}$ janvier 2000, ainsi $u_0 = 1000$.

1. Calculer u_1 et u_2. Donner les résultats arrondis au centime d'euro près.
2. Pour la suite, on considère que l'on a la relation : $u_{n+1} = 1{,}05\, u_n + 950$.

   On considère la suite (v_n) définie pour tout entier n positif ou nul par : $v_n = u_n + 19000$

   Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera le premier terme v_0 et la raison q.
3. En déduire l'expression de v_n, puis celle de u_n, en fonction de n.

   Quel sera le capital du client après 10 années écoulées depuis le 1$^{\text{er}}$ janvier 2000 ?
4. Au bout de combien d'années son capital dépassera-t-il 10000 € ?

TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°4 (2 heures)

Exercice 1 (5 points)

On lance n dés ($n \geqslant 1$). On note A l'événement "obtenir au moins un 6 (sur l'ensemble des n lancers)".

1. Décrire l'événement $\overline{A}$ à l'aide d'une phrase.
2. Faire un arbre et calculer $p(A)$ dans le cas où $n = 3$.
3. Dans cette question, on suppose n quelconque. Exprimer $p(A)$ en fonction de n.
4. Combien de dés faut-il lancer pour que la probabilité d'obtenir au moins un six soit supérieure à $\frac{3}{4}$?

Exercice 2 (3 points)

Une urne U_1 contient trois boules noires et sept boules blanches. Une urne U_2 contient cinq boules noires et cinq boules blanches. On choisit une urne au hasard (équiprobablement) et on tire successivement deux boules, avec remise, dans l'urne choisie. On note B_1 l'événement "obtenir une boule blanche au premier tirage" et B_2 l'événement "obtenir une boule blanche au second tirage"

1. Faire un arbre illustrant cette expérience aléatoire.
2. Les événements B_1 et B_2 sont-ils indépendants ?

Exercice 3 (5 points)

Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que, sur quinze malades, il y a deux personnes vaccinées. On suppose de plus que sur cent personnes vaccinées, huit sont malades. On choisit un individu au hasard dans cette population et on note : M = "l'individu est malade" et V = "l'individu est vacciné".

On a donc : $p(V) = \frac{1}{3}$; $p(V|M) = \frac{2}{15}$ et $p(M|V) = \frac{8}{100} = \frac{2}{25}$.

1. Calculer $p(M \cap V)$ puis $p(M)$. En déduire la proportion de malades dans la population.
2. Calculer la probabilité que l'individu soit malade sachant qu'il n'est pas vacciné.
3. Un vaccin est dit "efficace" lorsque : $p(M|\overline{V}) > p(M|V)$. Qu'en est-il ici ?

Exercice 4 (3 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x^2 + x - 4$.

1. Déterminer *la* primitive F de f telle que $F(-1) = 0$.
2. Calculer l'intégrale : $I(x) = \int_{-1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exercice 5 (4 points)

On considère la fonction f définie sur $]0 ; +\infty[$ par : $f(x) = \frac{1}{x}$.

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé

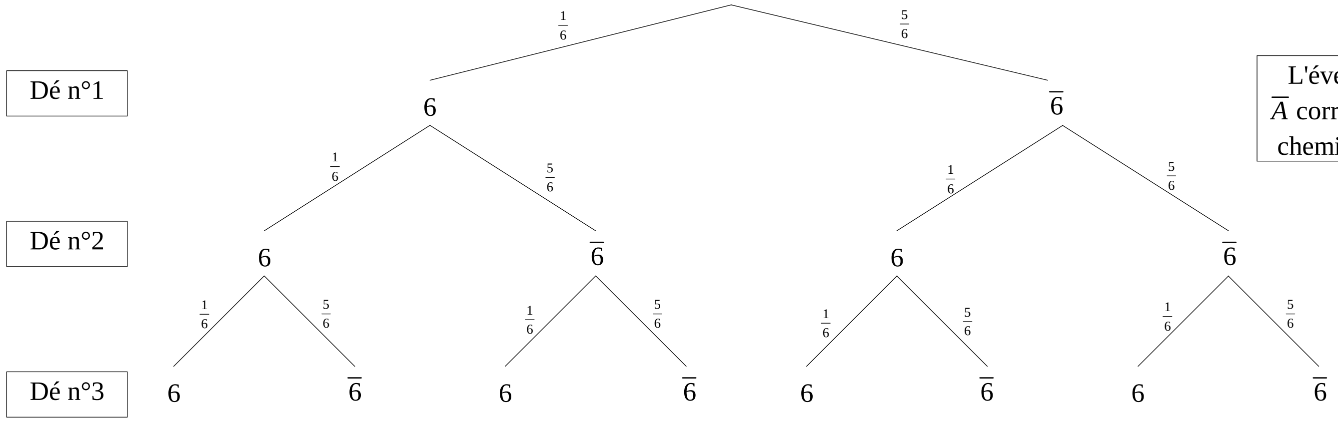
1. Tracer C_f. (Unités graphiques : 2 cm sur chaque axe)
2. Hachurer, sur le graphique, le domaine D défini par : $\{M(x ; y)$ avec $1 \leqslant x \leqslant 4$ et $0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$
3. Calculer l'aire du domaine D, en cm^2.

TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°4 CORRIGÉ des exercices de PROBABILITÉS

Exercice 1 (5 points)

1. $\overline{A}$ = "n'obtenir **aucun** 6 (sur l'ensemble des n lancers)"

2. Cas $n = 3$:



L'événement $\overline{A}$ correspond au chemin $\overline{6}\ \overline{6}\ \overline{6}$

$p(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^3$ d'où : $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^3$.

Rappel : $p(A) + p(\overline{A}) = 1$

3. En raisonnant de même que ci-dessus avec n dés, on a : $p(\overline{A}) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ d'où : $p(A) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$.

4. Il s'agit de déterminer le plus petit entier n tel que : $p(A) \geqslant \frac{3}{4}$. C'est-à-dire : $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant \frac{3}{4}$

Isolons le terme $\left(\frac{5}{6}\right)^n$: $\frac{1}{4} \geqslant \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Rappel : $A \geqslant B \Leftrightarrow \ln A \geqslant \ln B$ pour tous A et B de $]0 ; +\infty[$

Utilisons maintenant les logarithmes : $\ln \frac{1}{4} \geqslant \ln \left(\frac{5}{6}\right)^n$

Or, $\ln \frac{1}{4} = -\ln 4$ et $\ln \left(\frac{5}{6}\right)^n = n \ln \frac{5}{6}$ d'où : $-\ln 4 \geqslant n \ln \frac{5}{6}$

Rappel : $\ln(A^n) = n \ln A$ pour tout A de $]0 ; +\infty[$

On change le sens de l'inégalité si on multiplie (ou divise) par un nombre négatif !

Comme $\frac{5}{6} \in\ ]0 ; 1[$, on a $\ln \frac{5}{6} < 0$. d'où : $\frac{-\ln 4}{\ln \frac{5}{6}} \leqslant n$

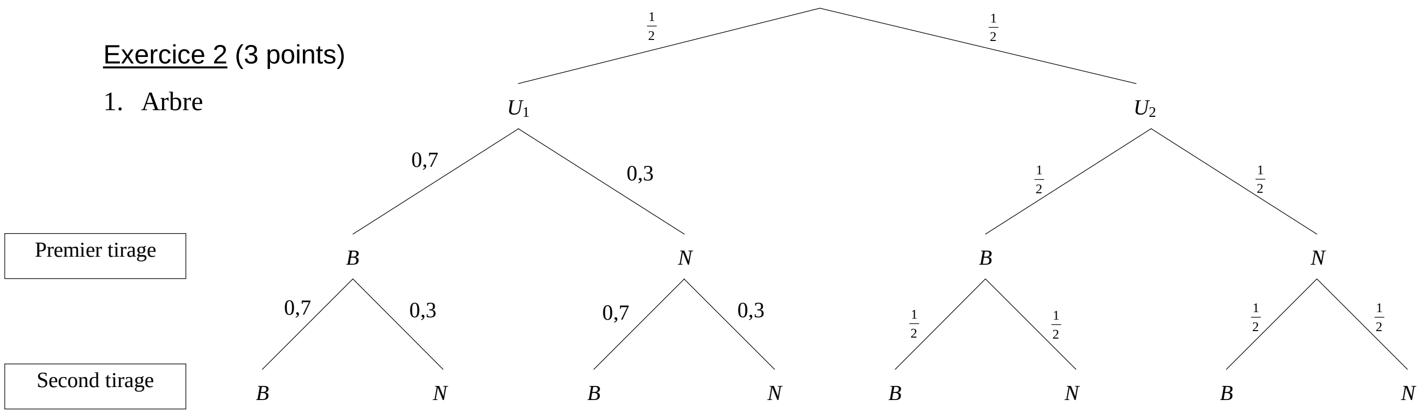
Rappel : (Rappel $\ln x < 0 \Leftrightarrow x \in\ ]0 ; 1[$)

Et comme $\frac{-\ln 4}{\ln \frac{5}{6}} \simeq 7{,}6$ et que n est un entier, on déduit : $n \geqslant 8$

Conclusion : il faut lancer au moins 8 dés pour être sûr à 75% d'obtenir au moins un 6.

Exercice 2 (3 points)

1. Arbre



2. Comparons $p(B_1)p(B_2)$ et $P(B_1 \cap B_2)$

L'événement B_1 correspond au chemin $U_1\,B$ ou au chemin $U_2\,B$

$p(B_1) = 0{,}5 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}35 + 0{,}25 = 0{,}6$

L'événement B_2 correspond aux chemins U_1BB ; U_1NB ; U_2BB ; U_2NB

$p(B_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}3 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}6$

Donc $p(B_1)p(B_2) = 0{,}36$.

L'événement $B_1 \cap B_2$ correspond aux chemins : U_1BB ; U_2BB

$p(B_1 \cap B_2) = 0{,}5 \times 0{,}7 \times 0{,}7 + 0{,}5 \times 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}37$.

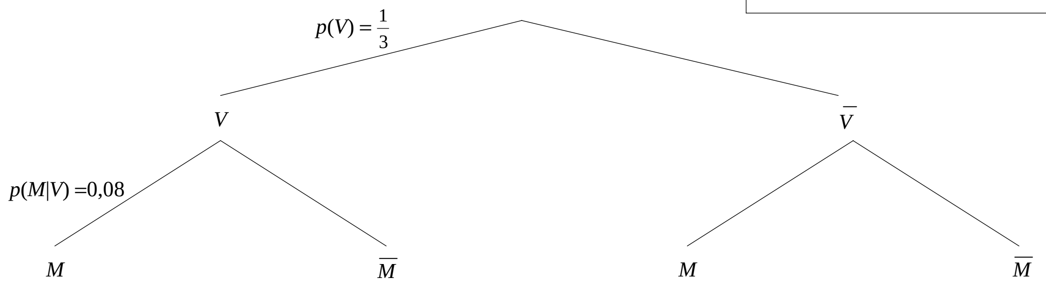
Comme $p(B_1)p(B_2) \neq p(B_1 \cap B_2)$, on déduit : **$B_1$ et B_2 ne sont pas indépendants.**

Remarque : ce résultat peut paraître surprenant. Il est dû à la composition différente entre boules blanches et noires dans les deux urnes et qu'on ne sait pas, a priori, dans quelle urne seront effectués les tirages.

Exercice 3 (5 points)

Données : $p(V) = \dfrac{1}{3}$; $p(V|M) = \dfrac{2}{15}$ et $p(M|V) = \dfrac{8}{100} = \dfrac{2}{25} = 0{,}08$.

Remarque : $p(M|V)$ n'est pas nul. Même vacciné, on peut tomber malade ! L'efficacité à 100% n'existe pas !



1. D'une part : $p(M \cap V) = p(M|V)\,p(V) = \dfrac{2}{25} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{75}$.

D'autre part : $p(M \cap V) = p(V|M)\,p(M)$ d'où $p(M) = \dfrac{p(M \cap V)}{p(V|M)} = \dfrac{2}{75} \times \dfrac{15}{2} = \dfrac{1}{5}$.

Puisque l'individu choisi a une "chance" sur 5 d'être malade, on peut estimer qu'il y a 20% de malades dans la population.

2. Il s'agit de calculer $p(M|\overline{V})$.

D'après la formule des probabilités totales appliquée à la partition $V \cup \overline{V}$ où d'après un raisonnement obtenu à l'aide d'un arbre, on a :

$$p(M) = p(M|V)p(V) + p(M|\overline{V})p(\overline{V})$$

D'où : $$p(M|\overline{V}) = \frac{p(M) - p(M|V)\,p(V)}{p(\overline{V})} = \frac{\frac{1}{5} - \frac{2}{25} \times \frac{1}{3}}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{13}{50} = 0{,}26.$$

3. Bilan : $p(M|\overline{V}) = 0{,}26$ et $p(M|V) = 0{,}08$. Donc $p(M|\overline{V}) > p(M|V)$. La probabilité d'être malade si on n'est pas vacciné est supérieure à la probabilité d'être malade si on est vacciné. **Ce vaccin est donc efficace**. (On peut même "mesurer" cette efficacité en calculant le rapport $\dfrac{p(M|\overline{V})}{p(M|V)} = 3{,}25$ qui s'interprète ainsi : le risque de tomber malade sans être vacciné est plus que 3 fois plus grand que si on est vacciné)

Ceci étant dit, ne tombez pas malades pendant ces vacances. Le vaccin contre la crise de foie n'existe pas encore !

***** JOYEUSES FÊTES *****

(Et ne laissez pas vos cahiers fermés !)

TES_1 : DS spécialité (2 heures)

Exercice 1 (4 points)

Les codes de carte bancaire sont constitués de 4 chiffres. (De 0000 à 9999)

1. Combien de codes existe-t-il au total ?
2. Combien de codes ne comportent pas de 0 ?
3. Combien de codes sont constitués de 4 chiffres distincts ?
4. Combien de codes sont constitués de 4 chiffres pairs distincts ?

Exercice 2 (5 points)

Une urne contient 49 boules numérotées de 1 à 49.

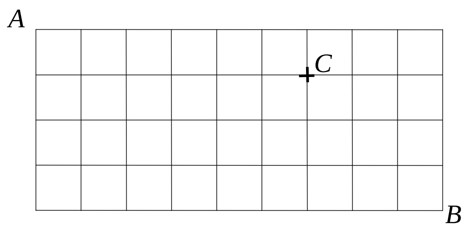
On tire successivement 6 boules, sans remise.

On appelle "tirage" cet ensemble de 6 numéros obtenus (sans tenir compte de l'ordre).

1. Combien y a-t-il de tirages au total ?
2. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent 3 numéros pairs **et** 3 numéros impairs ?
3. Combien y a-t-il de tirages qui contiennent au moins 5 numéros pairs ? (C'est-à-dire 5 numéros pairs **ou** 6 numéros pairs)

Exercice 3 (4 points)

1. Dénombrer les mots de 13 lettres qui contiennent 9 fois la lettre **D** et 4 fois la lettre **B**.
2. Dans le quadrillage ci-contre (9×4), combien y a-t-il de chemins allant de A à B (on se déplace uniquement vers la **D**roite ou vers le **B**as) ?
3. Combien de ces chemins passent par le point C ?



Exercice 4 (4 points)

Dans une classe, on souhaite élire un comité. (Un comité est un petit groupe d'élèves auquel on confiera une mission particulière). On suppose que chaque élève de la classe peut être élu.

1. Combien de comités de 3 personnes peut-on élire dans une classe de 31 élèves ?
2. Dans une classe de n élèves, il y a 351 façons d'élire un comité de 2 personnes. Quel est le nombre n d'élèves de cette classe ?

Exercice 5 (3 points)

1. Écrire le développement de $(a+b)^5$.
2. Écrire le développement de $(1+x)^5$.
3. Écrire le développement de $(1-\sqrt{2})^5$ sous la forme $p+q\sqrt{2}$ où p et q sont des entiers relatifs.

TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°5 (1 heure)

Exercice 1 (6 points)

Une urne contient 1 jeton numéroté ①, 2 jetons numérotés ② et 3 jetons numérotés ③.

On tire, au hasard, successivement deux jetons sans remise.

1. Faire un arbre (avec probabilités).
2. Quelle est la probabilité d'obtenir deux jetons identiques ?
3. On note X la somme des chiffres des deux jetons tirés.
   a) Quelles sont les différentes valeurs possibles pour X ?
   b) Donner la loi de probabilité de X.
   c) Calculer l'espérance $E(X)$ et l'écart type $\sigma(X)$.

Exercice 2 (10 points)

Dans cet exercice, n est un entier vérifiant $n \geqslant 4$. On place n jetons dans une urne : un jaune et des blancs.

À chaque fois que l'on choisit, au hasard, un jeton de l'urne on note :

J = "le jeton obtenu est jaune"

B = "le jeton obtenu est blanc"

1) On suppose que l'on choisit juste un jeton (au hasard).
   Exprimer en fonction de n les probabilités $p(J)$ et $p(B)$.
2) On considère maintenant le jeu suivant : on choisit successivement deux jetons avec remise. On gagne 16 € si l'on obtient deux fois le jeton jaune ; on gagne 1 € si l'on obtient deux fois un jeton blanc et on perd 5 € sinon.
   On note X le gain algébrique en euros (+16 ; +1 ou −5)
   a) Représenter cette situation à l'aide d'un arbre.
   b) Déterminer la loi de probabilité de X (en fonction de n)
   c) Exprimer $E(X)$ en fonction de n. (Réponse : $E(X) = \dfrac{n^2 - 12n + 27}{n^2}$)
   d) Comment choisir n pour avoir $E(X) = 0$?

Exercice 3 (4 points)

On considère un dé, non truqué, à six faces non numérotées mais coloriées :

Il y a deux faces rouges, deux faces vertes et deux faces oranges.

On lance le dé une fois. On gagne à tous les coups, sauf si la face obtenue est rouge.

1. Expliquer brièvement pourquoi on a **1 chance sur 3** de perdre.
2. On suppose que l'on reçoit 5 € lorsqu'on gagne, et que l'on donne **2 fois plus** lorsqu'on perd (c'est-à-dire 10 €)
   Ce jeu est-il équitable ?

TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°6 (2 heures)

L'exercice 1 et le problème (sur cette feuille) sont communs à tous les élèves.

Sur la feuille suivante, vous devez faire l'exercice 2 qui vous correspond (enseignement obligatoire ou spécialité).

Exercice 1 (4 points)

Soit h la fonction définie sur $]0\,;+\infty[$ par : $h(x) = (\ln x)^2$

1. Calculer la dérivée h' de la fonction h.
2. Calculer l'intégrale : $I = \int_1^{\mathbf{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$

Problème (10 points)

Partie A

On considère une fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = (a\,x^2 + bx + c)\,\mathbf{e}^{-x}$ (a, b et c sont des réels)

On note C sa représentation graphique dans un repère $(O,\ \vec{i}\,,\vec{j}\ )$.

On sait que la courbe C passe par le point $A(0\ ;\ 1)$ et qu'elle admet une tangente parallèle à (Ox) au point d'abscisse 1. On sait aussi que $f'(0) = -6$.

1. Exprimer, en fonction de a, b et c la dérivée f' de f.
2. Déterminer les coefficients a, b et c.

Partie B

On considère la fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = (\,x^2 - 5x + 1)\ \mathbf{e}^{-x}$

On note C sa représentation graphique dans un repère $(O,\ \vec{i}\,,\vec{j}\ )$.

1. Calculer $f(0)$.
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. Interpréter graphiquement.
3. Calculer la dérivée f' de f puis la factoriser.
4. En déduire le tableau de variation (complet) de la fonction f.
5. Déterminer une équation de la tangente T à C au point d'abscisse 0.

Exercice 2 (6 points) Enseignement obligatoire uniquement

Un industriel fabrique des tablettes de chocolat. Pour promouvoir la vente de ces tablette, il décide d'offrir des places de cinéma dans la moitié des tablettes mises en vente. Parmi les tablettes gagnantes, 60% permettent de gagner exactement une place de cinéma et 40% exactement deux places de cinéma.

On note $p(A|B)$ la probabilité conditionnelle de l'événement A sachant que l'événement B est réalisé.

1. Un client achète une tablette de chocolat. On considère les événements suivants :

   G = "le client achète une tablette gagnante"

   U = "le client gagne exactement une place de cinéma"

   D = "le client gagne exactement deux places de cinéma"

   a) Donner $p(G)$, $p(U|G)$ et $p(D|G)$

   b) Montrer que la probabilité de gagner exactement une place de cinéma est égale à 0,3.

   c) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de places de cinéma gagnées par le client.

      Déterminer la loi de probabilité de X.

      Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un autre client achète deux jours de suite une tablette de chocolat.

   a) Déterminer la probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma.

   b) Déterminer la probabilité qu'il gagne au moins une place de cinéma.

   c) Montrer que la probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma est égale à 0,29.

Exercice 2 (6 points) Enseignement de spécialité

Dans un lycée de 810 élèves, les effectifs par niveaux sont :

- 280 élèves en seconde
- 240 élèves en première
- 220 élèves en terminale
- 70 élèves en BTS.

On a décidé d'interroger, chaque jour, un groupe de 5 élèves choisis au hasard pour connaître leur opinion concernant les menus à la cantine.

Partie A - Pour une journée

Dans cette partie, on ne demande aucun calcul approché et on ne cherchera pas à simplifier les résultats obtenus.

1. Calculer la probabilité que les 5 élèves interrogés soient des élèves de seconde.
2. Calculer la probabilité que parmi les 5 élèves interrogés, un, exactement, soit un élève de première.
3. Calculer la probabilité p pour qu'au moins un élève de BTS soit interrogé.

Partie B - On répète l'opération pendant 6 jours de manière indépendante

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-5} près.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où au moins un élève de BTS est interrogé.

Dans tous les calculs, on prendra 0,3643 comme valeur de la probabilité qu' au moins un élève de BTS soit interrogé.

1. Calculer la probabilité pour que l'événement "au moins un élève de BTS est interrogé" se produise 4 fois exactement au cours de ces 6 jours.
2. Calculer la probabilité pour que, au cours de ces 6 jours, aucun élève de BTS ne soit interrogé.

TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ N°6 : CORRIGÉ

Exercice 1 (4 points)

Soit h la fonction définie sur $]0\ ;+\infty[$ par : $h(x) = (\ln x)^2$

1. La fonction h est du type : $h = u^2$ avec $u(x) = \ln x$

   Donc : $h' = 2u'u$

   On obtient : $h'(x) = 2 \times \frac{1}{x} \times \ln x = 2\frac{\ln x}{x}$

2. $$I = \int_1^{\mathbf{e}} \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_1^{\mathbf{e}} h'(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\,[h(x)]_1^{\mathbf{e}} = \frac{1}{2}\,[h(\mathbf{e}) - h(1)] = \frac{1}{2}$$

Problème (10 points)

Partie A

1. La fonction f est du type : $f = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = ax^2 + bx + c \\ v(x) = \mathbf{e}^{-x} \end{cases}$

   Donc : $f' = u'v + uv'$

   On obtient : $f'(x) = (2ax + b)\ \mathbf{e}^{-x} + (a\,x^2 + bx + c)(-\,\mathbf{e}^{-x})$

   $$f'(x) = (-a\,x^2 + (2a - b)x + (b - c))\ \mathbf{e}^{-x}$$

2. La condition "C passe par $A(0\ ;1)$", c'est-à-dire $f(0) = 1$ se traduit par :

   $$(a \times 0^2 + b \times 0 + c)\,\mathbf{e}^{-0} = 1$$

   $$\boldsymbol{c = 1}$$

   La condition "C admet un tangente parallèle à l'axe (Ox) au point d'abscisse 1" se traduit par :

   $$f'(1) = 0$$

   $$(-a + (2a - b) + (b - c))\ \mathbf{e}^{-1} = 0$$

   $$(a - c)\ \mathbf{e}^{-1} = 0$$

   $$a - c = 0 \ \text{ ou } \ \mathbf{e}^{-1} = 1 \text{ (ce qui est impossible)}$$

   $$\boldsymbol{a = c = 1}$$

   La condition "$f'(0) = -6$" se traduit par :

   $$b - c = -6$$

   $$\boldsymbol{b = -5}$$

   Conclusion : l'expression de la fonction f est : $f(x) = (\,x^2 - 5x + 1)\ \mathbf{e}^{-x}$

Partie B

1. $f(0) = 1$.
2. Limite de f en $-\infty$:

   La limite d'une fonction polynôme en $-\infty$ est égale à la limite de son terme de plus haut degré, donc :

   $$\lim_{x \to -\infty} (\,x^2 - 5x + 1) = \lim_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$$

Par ailleurs : $\lim\limits_{x \to -\infty} \mathbf{e}^{-x} = +\infty$ (car en posant $X = -x$, on obtient : $\lim\limits_{X \to +\infty} \mathbf{e}^{X} = +\infty$)

Donc, par produit, on obtient : $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

<u>Limite de f en $+\infty$</u> :

On est en présence d'un produit indéterminé (du type "$+\infty \times 0$")

Pour lever cette indétermination, on peut développer (afin de se ramener à une somme) :

$$f(x) = x^2\,\mathbf{e}^{-x} - 5x\,\mathbf{e}^{-x} + \mathbf{e}^{-x}$$

D'après le formulaire, on sait que : $\lim\limits_{x \to +\infty} x^{\alpha}\,\mathbf{e}^{-x} = 0$ pour tout réel $\alpha > 0$.

En particulier pour $\alpha = 2$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\,\mathbf{e}^{-x} = 0$

De même avec $\alpha = 1$: $\lim\limits_{x \to +\infty} x\,\mathbf{e}^{-x} = 0$ et donc $\lim\limits_{x \to +\infty} 5x\,\mathbf{e}^{-x} = 0$

Enfin, on a : $\lim\limits_{x \to +\infty} \mathbf{e}^{-x} = 0$ (car en posant $X = -x$, on obtient : $\lim\limits_{X \to -\infty} \mathbf{e}^{X} = 0$)

Donc, par somme, on obtient finalement : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

<u>Interprétation graphique</u> :

La limite de f en $-\infty$ n'est pas finie, donc la courbe C n'admet pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

La limite de f en $+\infty$ est finie, donc la courbe C admet une asymptote horizontale en $+\infty$ d'équation $y = 0$.

3. D'après la question [A1] avec $a = 1$, $b = -5$ et $c = 1$, on obtient : $f'(x) = (-x^2 + 7x - 6)\,\mathbf{e}^{-x}$

   Étudions le trinôme $-x^2 + 7x - 6$. Son discriminant Δ vaut 25. Comme Δ est strictement positif, notre trinôme admet deux racines distinctes : $x_1 = ... = 6$ et $x_2 = ... = 1$.

   En utilisant la relation : $a\,x^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, on obtient la factorisation suivante :

$$f'(x) = -(x-6)(x-1)\,\mathbf{e}^{-x} = (6-x)(x-1)\,\mathbf{e}^{-x}$$

4. Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		1		6		$+\infty$	Calculs et justifications des signes
Signe de $(6 - x)$		$+$		$+$	0	$-$		$6 - x \geqslant 0 \iff 6 \geqslant x$
Signe de $(x - 1)$		$-$	0	$+$		$+$		$x - 1 \geqslant 0 \iff x \geqslant 1$
Signe de $\mathbf{e}^{-x}$		$+$		$+$		$+$		Une exponentielle est toujours strictement positive
Signe de la dérivée $f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$		
Variations de la fonction f	$+\infty$	$\searrow$	$-\frac{3}{\mathbf{e}}$	$\nearrow$	$\frac{7}{\mathbf{e}^6}$	$\searrow$	0	

   Maximum relatif en 6 : $f(6) = (6^2 - 30 + 1)\,\mathbf{e}^{-6} = 7\,\mathbf{e}^{-6}$

   Minimum relatif en 1 : $f(1) = (1^2 - 5 + 1)\,\mathbf{e}^{-1} = -3\,\mathbf{e}^{-1}$

5. Une équation de la tangente T à C au point d'abscisse x_0 est donnée par :

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

   Avec $x_0 = 0$, cela donne : $y = f'(0)x + f(0)$

   Or, $f(0) = 1$ et $f'(0) = -6$.

   D'où : $\boldsymbol{T : y = -6x + 1}$

Exercice 2 (6 points) Enseignement obligatoire uniquement

1. a) L'arbre ci-contre décrit les différentes situations possibles.

   Soit la tablette est gagnante, soit elle ne l'est pas.

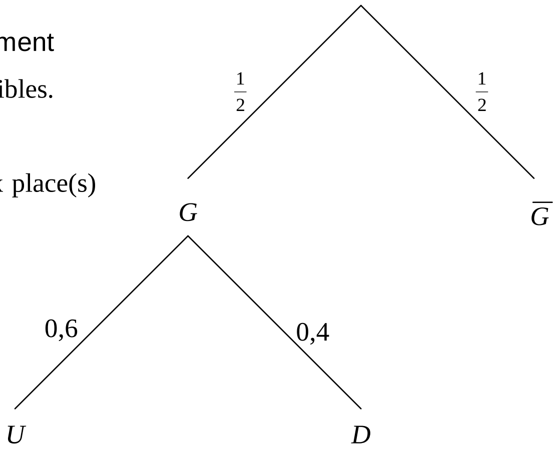
   Si elle est gagnante, elle contient soit une, soit deux place(s) de cinéma.

   On a immédiatement :

   $p(G) = \frac{1}{2}$

   $p(U|G) = 0{,}6$

   $p(D|G) = 0{,}4$



   b) L'événement "gagner exactement une place de cinéma" est $G \cap U$.

   D'après les formules de cours (ou à l'aide de l'arbre), on a :

   $$p(G \cap U) = p(U \cap G) = p(U|G)\ p(G) = 0{,}6 \times 0{,}5 = 0{,}3$$

   c) Calculons la probabilité de gagner respectivement 0, 1 et 2 place(s) de cinéma.

   $p(X = 0) = p(\overline{G}) = 0{,}5$

   $p(X = 1) = p(G \cap U) = 0{,}3$

   $p(X = 2) = p(G \cap D) = p(D|G)\ p(G) = 0{,}4 \times 0{,}5 = 0{,}2$

   On résume la loi de probabilité de X dans le tableau suivant :

X	0	1	2	Total
Probabilités	0,5	0,3	0,2	1

   L'espérance mathématique $E(X)$ de la variable aléatoire X est donnée par la formule :

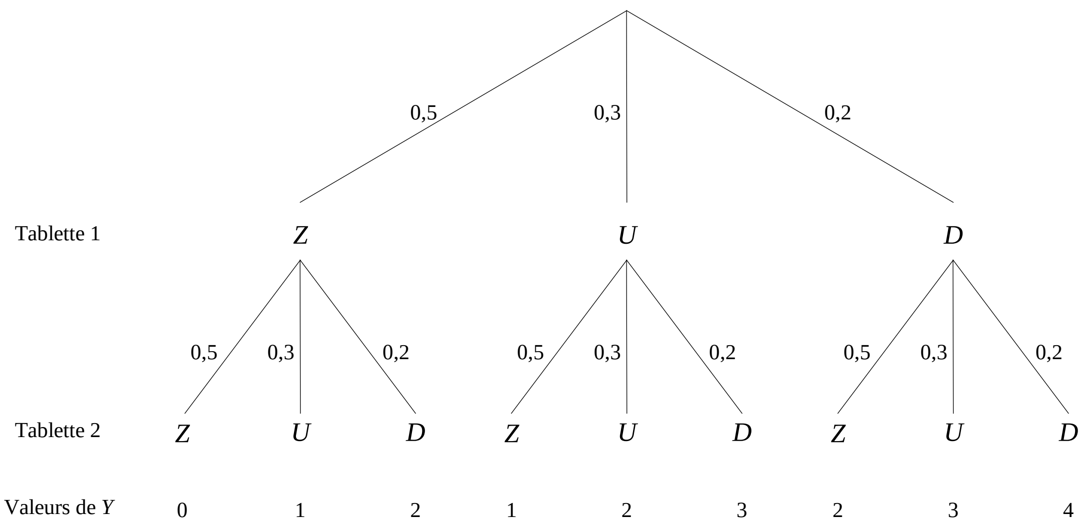
   $$E(X) = \sum_i p_i x_i = 0{,}5 \times 0 + 0{,}3 \times 1 + 0{,}2 \times 2 = 0{,}7$$

2. Notons Y la variable aléatoire correspondant au nombre de tablettes gagnées par ce client.

   Les différentes valeurs possibles de Y sont : 0 ou 1 ou 2 ou 3 ou 4.

   L'arbre ci-dessous illustre toutes les situations possibles :

   (On a noté Z l'événement "la tablette rapporte zéro place de cinéma". En fait, $Z = \overline{G}$)



   a) Probabilité qu'il ne gagne aucune place de cinéma : $p(Y = 0) = 0{,}5 \times 0{,}5 = 0{,}25$ (Chemin Z-Z sur l'arbre)

   b) L'événement "il gagne au moins une place de cinéma" est le contraire de l'événement "il ne gagne aucune place de cinéma" : $p(Y \geqslant 1) = 1 - p(Y = 0) = 1 - 0{,}25 = 0{,}75$.

   c) Probabilité qu'il gagne exactement deux places de cinéma :

   $$p(Y = 2) = 0{,}5 \times 0{,}2 + 0{,}3 \times 0{,}3 + 0{,}2 \times 0{,}5 = 0{,}29$$

   (Chemins D-Z ou U-U ou Z-D)

Exercice 2 (6 points) Enseignement de spécialité

Dans un lycée de 810 élèves, les effectifs par niveaux sont :

- 280 élèves en seconde
- 240 élèves en première
- 220 élèves en terminale
- 70 élèves en BTS.

On a décidé d'interroger, chaque jour, un groupe de 5 élèves choisis au hasard pour connaître leur opinion concernant les menus à la cantine.

Partie A - Pour une journée

Dans cette partie, on ne demande aucun calcul approché et on ne cherchera pas à simplifier les résultats obtenus.

1. Calculer la probabilité que les 5 élèves interrogés soient des élèves de seconde.
2. Calculer la probabilité que parmi les 5 élèves interrogés, un, exactement, soit un élève de première.
3. Calculer la probabilité p pour qu'au moins un élève de BTS soit interrogé.

Partie B - On répète l'opération pendant 6 jours de manière indépendante

Dans cette partie, les résultats seront arrondis à 10^{-5} près.

Soit X la variable aléatoire correspondant au nombre de jours où au moins un élève de BTS est interrogé.

Dans tous les calculs, on prendra 0,3643 comme valeur de la probabilité qu'au moins un élève de BTS soit interrogé.

1. Calculer la probabilité pour que l'événement "au moins un élève de BTS est interrogé" se produise 4 fois exactement au cours de ces 6 jours.
2. Calculer la probabilité pour que, au cours de ces 6 jours, aucun élève de BTS ne soit interrogé.

TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ Spécialité

Exercice 1

Un marchand de glaces propose dix parfums au choix pour des glaces en cornet. Trois élèves choisissent, au hasard et indépendamment l'un de l'autre, un des parfums proposés.

1. Calculer la probabilité de l'événement A : "les trois élèves choisissent des parfums deux à deux distincts"
2. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de parfums choisis par les trois élèves.
   Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer son espérance mathématique. Interpréter.

Exercice 2

1. Une grande enveloppe contient les douze "figures" d'un jeu de carte : les quatre rois, les quatre dames et les quatre valets. On tire, simultanément et au hasard, cinq cartes de l'enveloppe. Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, associe le nombre de rois obtenus.
   Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique. Interpréter.
2. Dans la même enveloppe contenant les mêmes douze cartes, on effectue successivement cinq fois le tirage d'une carte que l'on remet à chaque fois dans l'enveloppe. Soit Y la variable aléatoire dont la valeur est égale au nombre de rois obtenus au cours des cinq tirages.
   Déterminer la loi de probabilité de Y et calculer son espérance mathématique. Interpréter.

Problème

Partie A

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = 1 + x - \mathbf{e}^{-\frac{x}{2}}$

On note C_f sa représentation graphique dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (Unités graphiqes : 2 cm)

1. a. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
   b. Montrer que la droite D d'équation $y = 1 + x$ est asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$.
   c. Étudier la position de C_f par rapport à D.
2. a. Calculer la dérivée f' de f puis étudier son signe.
   b. En déduire le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.
3. Tracer, dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe C_f et la droite D.

Partie B

Soit n un entier naturel non nul. On désigne par A_n l'aire, en unités d'aire, de la partie du plan délimité par la droite D, la courbe C_f et les droites d'équation $x = n$ et $x = n + 1$.

1. Hachurer, sur le graphique le domaine défini ci-dessus pour $n = 2$.
2. Exprimer A_n en fonction de n.
3. En déduire que la suite (A_n) est géométrique. On précisera sa raison q et son premier terme A_1.
4. Exprimer la somme $S_n = A_1 + A_2 + ... + A_n$ en fonction de n. Que représente S_n graphiquement ?
5. Calculer la limite de la suite (S_n).

TES$_1$: DEVOIR SURVEILLÉ Spécialité CORRIGÉ

Note : ces deux exercices et ce problème sont issus des anales de BAC. Ils vous ont été donnés "texto"...

Exercice 1

1. Pour calculer la probabilité de A, on utilise la formule : $p(A) = \dfrac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}$

   Première méthode : (simple et naturelle)

   Calcul du nombre de cas possibles :

   Le premier élève a **10** choix de parfums.

   Le second élève a **10** choix de parfums.

   Le troisième élève a **10** choix de parfums.

   Au total, nous obtenons : $10 \times 10 \times 10 = 10^3 = 1000$ cas possibles.

   Calcul du nombre de cas favorables :

   Le premier élève a **10** choix de parfums.

   Le second élève a **9** choix de parfums. (Car on souhaite qu'il ait un parfum différent du premier)

   Le troisième élève a **8** choix de parfums. (Car on souhaite qu'il ait un parfum différent des deux premiers)

   Au total, nous obtenons : $10 \times 9 \times 8 = 720$ cas favorables.

   Bilan : $p(A) = \dfrac{720}{1000} = \dfrac{18}{25} = 0{,}72$.

   Deuxième méthode : (utilisant des notions de dénombrement)

   Notons E l'ensemble $\{a\ ;\ b\ ;\ c\ ;\ d\ ;\ e\ ;\ f\ ;\ g\ ;\ h\ ;\ i\ ;\ j\}$ où chaque lettre désigne un parfum.

   À chaque choix de parfum des trois élèves, on peut associer une **liste**. Par exemple, la liste *gag* signifie que le premier élève a choisi le parfum g, le second le parfum a et le troisième le parfum g.

   Le nombre de cas possibles est égal au nombre de 3-listes de l'ensemble E. Il y en a $10^3 = 1000$.

   Le nombre de cas favorables est égal au nombre de 3-listes d'éléments distincts de l'ensemble E, c'est-à-dire au nombre de 3-arrangements de E. Il y en a $A_{10}^3 = 720$.

   On retrouve $p(A) = \dfrac{720}{1000} = \dfrac{18}{25} = 0{,}72$.

2. Les différentes valeurs possibles de X sont 1 ou 2 ou 3.

   On sait déjà, d'après la question 1 que : $p(X = 3) = p(A) = \dfrac{18}{25}$.

   Calcul de $p(X = 1)$:

   Nombre de cas favorables : $10 \times 1 \times 1$. (Le premier élève a 10 choix, les deux suivants sont contraints de prendre le même parfum).

   D'où : $p(X = 1) = \dfrac{10}{1000} = \dfrac{1}{100}$

   Par ailleurs, les événements "$X = 1$", "$X = 2$" et "$X = 3$" forment une partition de l'univers. On a donc :

   $$p(X = 1) + p(X = 2) + p(X = 3) = 1$$

   D'où : $$p(X = 2) = 1 - p(X = 1) - p(X = 3) = 1 - \frac{1}{100} - \frac{18}{25} = \frac{27}{100}$$

   Remarque : on peut aussi calculer $p(X = 2)$ directement :

nombre de cas favorables : nombre de 3-listes de E qui contiennent 2 lettres distinctes (et donc une lettre répétée deux fois) :

choix de la lettre répétée : 10 choix. (Exemple g)

choix de l'autre lettre (distincte de la lettre répétée) : 9 choix (Exemple a)

choix de la position de la lettre non répétée : 3 choix (*agg* ou *gag* ou *gga*)

Au total : $10 \times 9 \times 3 = 270$ cas favorables.

On retrouve bien : $p(X = 2) = \dfrac{270}{1000} = \dfrac{27}{100}$

On résume maintenant la loi de probabilité de X sous forme de tableau :

X	1	2	3	Total
Probabilités	0,01	0,27	0,72	1

Calcul de l'espérance mathématique de X :

$$E(X) = \sum_i p_i x_i = 0{,}01 \times 1 + 0{,}27 \times 2 + 0{,}72 \times 3 = 2{,}71$$

En moyenne, le nombre de parfums distincts choisis par les trois élèves est 2,71.

Exercice 2

1. Le nombre de façons de choisir 5 cartes parmi 12 est : C_{12}^5

   Le nombre de façons de choisir k rois ($k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$) parmi 4 est : C_4^k

   Le nombre de façons de choisir $5 - k$ autres cartes (non rois) parmi les 8 restantes est : C_8^{5-k}

   On a donc : $p(X = k) = \dfrac{C_4^k C_8^{5-k}}{C_{12}^8}$ pour tout $k \in \{0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4\}$

   À l'aide de la calculatrice, on obtient :

X	0	1	2	3	4	Total
Probabilités	$\frac{7}{99}$	$\frac{35}{99}$	$\frac{42}{99}$	$\frac{14}{99}$	$\frac{1}{99}$	1

   Calcul de l'espérance mathématique de X :

$$E(X) = \sum_i p_i x_i = \frac{165}{99} = \frac{5}{3}$$

   En moyenne, le nombre de rois obtenus, par cette méthode de tirage, est $\dfrac{5}{3}$ ($\simeq 1{,}67$).

2. Soit $\mathscr{E}$ l'expérience : "on tire, au hasard et avec remise, **une** carte de l'enveloppe et on regarde si c'est un roi"

   Cette expérience aléatoire possède **deux issues** : obtenir un roi (Succès) ou non (Echec).

   C'est donc une **épreuve de Bernoulli** de paramètre $p = p(\text{Succès}) = \dfrac{4}{12} = \dfrac{1}{3}$.

   On **répète, de manière indépendante**, $n = 5$ fois cette épreuve de Bernoulli.

   La variable aléatoire Y (nombre de rois obtenus) représente le **nombre de succès** obtenus ($0 \leqslant Y \leqslant 5$)

   On peut donc affirmer que la variable aléatoire Y est **binomiale** de paramètre $n = 5$ et $p = \dfrac{1}{3}$:

$$Y \hookrightarrow B(5 ; \frac{1}{3}).$$

   Dans ce cas, on sait alors que :

$$p(Y=k) = C_5^k \left(\frac{1}{3}\right)^k \left(\frac{2}{3}\right)^{5-k} \quad \text{pour tout } k \in \{0\ ;1\ ;2\ ;3\ ;4\ ;5\}$$

À l'aide de la calculatrice, on obtient (à 10^{-3} près) :

Y	0	1	2	3	4	5	Total
Probabilités	0,132	0,329	0,329	0,165	0,041	0,004	1

Calcul de l'espérance mathématique de Y :

$$E(Y) = np = 5 \times \frac{1}{3} = \frac{5}{3}$$

En moyenne, le nombre de rois obtenus, par cette méthode de tirage, est $\frac{5}{3}$ ($\simeq$ 1,67).

Problème

Partie A

1. a. Limite de f en $+\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to+\infty} (1+x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{-\frac{x}{2}} = 0 \ \left(\text{car } \lim\limits_{x\to+\infty} -\frac{x}{2} = -\infty \text{ et } \lim\limits_{X\to-\infty} \mathbf{e}^X = 0\right) \end{cases}$$

Donc, par soustraction, on obtient : $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$.

Remarque : la limite de f en $+\infty$ n'étant **pas finie**, on peut affirmer que la courbe C_f n'a pas d'asymptote horizontale en $+\infty$.

Limite de f en $-\infty$:

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} (1+x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{-\frac{x}{2}} = +\infty \ \left(\text{car } \lim\limits_{x\to-\infty} -\frac{x}{2} = +\infty \text{ et } \lim\limits_{X\to+\infty} \mathbf{e}^X = +\infty\right) \end{cases}$$

Donc, par soustraction, on obtient : $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Remarque : la limite de f en $-\infty$ n'étant **pas finie**, on peut affirmer que la courbe C_f n'a pas d'asymptote horizontale en $-\infty$.

b. Pour montrer que la droite D d'équation $y = 1 + x$ est asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$, on montre que la **limite en $+\infty$ de $f(x) - (1 + x)$ est nulle**.

On a : $$f(x) - (1+x) = -\mathbf{e}^{-\frac{x}{2}}$$

Or, on a vu à la question [A1a] que : $$\lim\limits_{x\to+\infty} -\mathbf{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$$

Donc, on a bien : $$\lim\limits_{x\to+\infty} [f(x) - (1+x)] = 0$$

La droite D d'équation $y = 1 + x$ est donc asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$.

c. Pour étudier la position de C_f par rapport à D, on étudie le **signe de la différence $f(x) - (1 + x)$.**

On a déjà vu que : $$f(x) - (1 + x) = -\mathbf{e}^{-\frac{x}{2}}$$

Comme une exponentielle est strictement positive, on a ici : $f(x) - (1 + x) < 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

C'est-à-dire : $f(x) < 1 + x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

On en déduit : C_f est en dessous de D sur $\mathbb{R}$

2. a. On rappelle ici que : $$(\mathbf{e}^u)' = u' \ \mathbf{e}^u$$

En particulier, avec $u(x) = -\dfrac{x}{2}$: $$(\mathbf{e}^{-\frac{x}{2}})' = -\frac{1}{2}\ \mathbf{e}^{-\frac{x}{2}}$$

D'où : $$f'(x) = 1 + \frac{1}{2}\ \mathbf{e}^{-\frac{x}{2}}$$

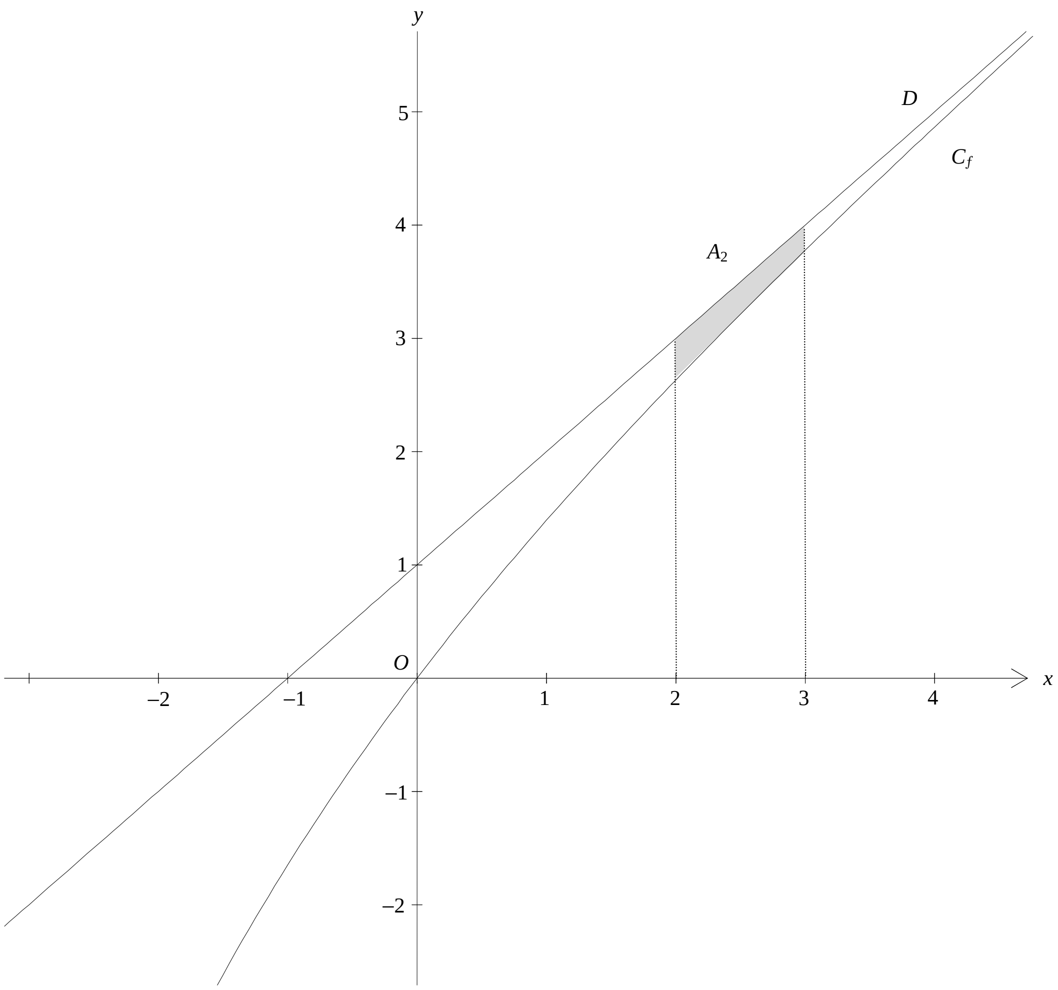
Comme l'exponentielle est strictement positive sur $\mathbb{R}$: $f'(x) > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

La fonction f est donc strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b. Tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de f	$-\infty$ ↗	$+\infty$

3. Représentation graphique :



Partie B

1. Voir graphique.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A_n = \int_n^{n+1} (x+1-f(x))\,\mathrm{d}x = \int_n^{n+1} \mathbf{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\mathbf{e}^{-\frac{x}{2}}}{-\frac{1}{2}}\right]_n^{n+1} = -2\left(\mathbf{e}^{-\frac{n+1}{2}} - \mathbf{e}^{-\frac{n}{2}}\right) = -2\,\mathbf{e}^{-\frac{n}{2}}\left(\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}} - 1\right)$$

Or, $\mathbf{e}^{-\frac{1}{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}$. On peut donc écrire : $A_n = 2\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}\right)^n \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}\right)$

3. D'après la question [B2], pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$A_{n+1} = 2\left(\frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}\right)^{n+1}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}\right) = \frac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}A_n$$

Ceci prouve donc que la suite (A_n) est géométrique de raison $q = \dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}$.

Et toujours d'après ma question [B2] : $A_1 = \dfrac{2}{\sqrt{\mathbf{e}}}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}\right)$

Ce que l'on peut écrire : $A_1 = 2q(1-q)$ (où $q = \dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}$)

4. S_n est la somme n termes successifs d'une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}$.

On a donc : $S_n = \dfrac{A_1(1-q^n)}{1-q}$

Et d'après la question [B3] : $S_n = \dfrac{2q(1-q)(1-q^n)}{1-q} = 2q(1-q^n) = \dfrac{2}{\sqrt{\mathbf{e}}}\left(1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}\right)^n\right)$

Graphiquement S_n correspond à l'aire délimitée par D, C_f et les droites verticales d'équation $x = 1$ et $x = n + 1$.

5. Comme $\dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}} \in [0\,;\,1[$, on a : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{\mathbf{e}}}\right)^n = 0.$

On en déduit : $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = \dfrac{2}{\sqrt{\mathbf{e}}}$