

## I ] Quelques rappels :

1. **Définition 1 :** Une suite réelle est une fonction de  $\mathbb{N}$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Notation :**  $u_n$  = lire "u indice n" = terme d'indice, ou de rang  $n$  = terme général de la suite  $u$ .

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} = (u_n) = u = \text{suite}$$

Une suite peut être définie explicitement par une fonction (exemple  $u_n = f(n) = n^2 + 2n + 3$ ), ou par récurrence  $u_{n+1} = f(u_n)$ .

**Définition 2 :** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **majorée** s'il existe un réel  $M$ , appelé **majorant** de la suite, tel que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \leq M$ . La suite est dite **minorée** s'il existe un réel  $m$ , appelé **minorant** de la suite, tel que, pour tout entier naturel  $n$ , on a  $u_n \geq m$ . Une suite à la fois majorée et minorée, est dite **bornée**.

**Définition 3 :** Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **croissante** si, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \leq u_{n+1}$ . Une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est dite **décroissante** si, pour tout entier naturel  $n$ , on a :  $u_n \geq u_{n+1}$ . Une suite est **monotone** si elle est croissante ou décroissante.

**Méthodes :** - On peut comparer directement  $u_n$  et  $u_{n+1}$  grâce aux propriétés des inégalités.

- On peut étudier le signe de la différence  $u_{n+1} - u_n$ .

- Si la suite  $u$  est définie au moyen d'une fonction  $f$  par  $u_n = f(n)$ , on peut étudier les variations de la fonction  $f$ .

- Si tous les termes de la suite  $u$  sont strictement positifs, on peut comparer à 1 le quotient  $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ .

- Si la suite est définie par récurrence, on peut utiliser une démonstration par récurrence.

2. **Suites arithmético-géométriques** vérifiant :  **$u_{n+1} = a u_n + b$**

a. Pour les exemples suivants, tracer dans un repère  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  orthonormal, le chemin de la suite et observer la convergence :

$$\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{5}u_n + 3 \\ u_0 = 2 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n - 3 \\ u_0 = 4 \end{cases} \quad \begin{cases} u_{n+1} = -\frac{2}{3}u_n + 6 \\ u_0 = 1 \end{cases}$$

b. Si  $a \neq 1$  et  $b \neq 0$ , pour calculer le terme général de  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , on se ramène au cas de la

suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $v_n = u_n - \alpha$  avec  $\alpha = \frac{b}{1-a}$  une constante réelle telle que la

suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  soit géométrique.

c. Si  $a = 1$  :  **$u_{n+1} = u_n + b$**  : cas d'une **suite arithmétique** où on obtient un terme en ajoutant au précédent une constante  $b$  appelée raison. Alors

$$u_n = u_0 + n b \quad \text{ou} \quad u_n = u_1 + (n-1) b \quad ; \quad u_p = u_q + (p-q)b$$

**Somme des premiers termes d'une suite arithmétique :**

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = \frac{(n+1)(u_0 + u_n)}{2}$$

On peut aussi retenir :  $\text{Somme des termes} = \frac{(n^{\text{bre de termes}}) \times (1^{\text{er}} \text{ terme} + \text{dernier terme})}{2}$

d. Si  $b = 0$  :  **$u_{n+1} = a u_n$**  : cas d'une **suite géométrique** où on obtient un terme en multipliant le précédent par une constante  $a$  appelée raison. Alors  $u_n = u_0 a^n$  ou  $u_n = u_1 a^{n-1}$   
 $u_p = u_q a^{p-q}$

## Somme des premiers termes d'une suite géométrique :

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_{n-1} + u_n = u_0 \times \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} \text{ pour } a \neq 1$$

On peut aussi retenir : 
$$\text{Somme des termes} = 1^{\text{er}} \text{ terme} \times \frac{1 - (\text{raison})^{\text{nbr de termes}}}{1 - \text{raison}}$$

3. **Convergence** : **Définition 4** : Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite réelle et  $\ell$  un réel. On dit que la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  admet (ou a)  $\ell$  pour limite, ou encore **converge** (ou tend) vers  $\ell$ , si tout intervalle ouvert contenant  $\ell$  contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Une suite qui ne converge pas vers un réel est dite **divergente**.

Opération: On retrouve toutes les opérations classiques de calcul de limites.

**Théorème des gendarmes** : soit  $(u_n; v_n; w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  un triplet de suites telles que les suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergent vers la même limite  $\ell$  et vérifient, pour  $n$  assez grand, les relations  $u_n \leq v_n \leq w_n$ . Alors la suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge aussi vers  $\ell$ .

**Corollaire** : Si  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aussi. Si  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $-\infty$ ,  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  aussi.

**Propriété** : Toute suite géométrique de raison  $q$  avec  $|q| < 1$ , converge vers 0.

## II ] Convergence

1. **Théorème de limite de composée**: (Admis)

- Lorsque  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $\ell$ , si la fonction  $f$  est continue en  $\ell$ , alors la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $f(\ell)$ .
- Lorsque  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un réel  $L$ , si  $\lim_{x \rightarrow L} f(x) = +\infty$ , alors la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .
- Lorsque  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ , si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L$ , alors la suite  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $L$  et si  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  alors  $(f(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  diverge vers  $+\infty$ .

2. **Propriétés** ( admises ) :

- Si une suite croissante est majorée, alors elle est convergente.
- Si une suite décroissante est minorée, alors elle est convergente.

3. **Propriété** :

- Une suite croissante non majorée diverge vers  $+\infty$ .
- Une suite décroissante non minorée diverge vers  $-\infty$ .

## III ] Suites adjacentes

1. **Définition** : Deux suites  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sont dites **adjacentes** si :

- La suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est croissante.
- La suite  $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est décroissante.
- La suite  $(u_n - v_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0.

2. **Théorème** : Deux suites adjacentes ont la même limite.