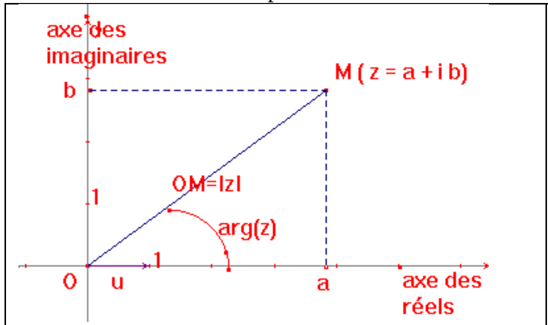
z : affixe du point M $\qquad$ $(a\,;b) \in \mathbb{R}^2$



$a = Re(z)$ partie réelle du nombre complexe z

$b = Im(z)$ partie imaginaire du nombre complexe. z

$z = a + i\,b$ (forme algébrique)

$\begin{cases} z = r\,(\cos(\theta) + i\sin(\theta)) \\ z = [r\,,\theta] \end{cases}$ (f. trigo.)

$z = r\,e^{i\,\theta}$ (forme exponentielle)

$r = |z|$ = module de z = $\sqrt{a^2 + b^2}$

$\theta = arg(z) = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ $(z \neq o)$

def. par $\begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{a}{r} \\ \sin(\theta) = \dfrac{b}{r} \end{cases}$

Vecteurs et distances

z affixe de $\overrightarrow{OM}$: on note $\overrightarrow{OM}$ (z) $(z_B - z_A)$ affixe de $\overrightarrow{AB}$: on note $\overrightarrow{AB}$ $(z_B - z_A)$	Distance OM = $\lvert z \rvert$ Distance AB = $\lvert z_B - z_A \rvert$

Conjugué : $\boxed{\bar{z} = a - ib}$ M($\bar{z}$) symétrique de M(z) par rapport à (Ox)

$\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$	$\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)} = \dfrac{\bar{z}}{\bar{z}'}$	$\overline{zz'} = \bar{z}\,\bar{z}'$	$\bar{\bar{z}} = z$	$\overline{z^n} = (\bar{z})^n$

Module : $\boxed{r = \lvert z \rvert = \text{module de } z = \sqrt{a^2 + b^2}}$ ($r = \lvert z \rvert$ = distance OM)

$\lvert \bar{z} \rvert = \lvert z \rvert$ $\lvert -z \rvert = \lvert z \rvert$	$\lvert zz' \rvert = \lvert z \rvert\,\lvert z' \rvert$ $\lvert z^n \rvert = \lvert z \rvert^n$ $(n \in \mathbb{Z})$	$\left\lvert \dfrac{z}{z'} \right\rvert = \dfrac{\lvert z \rvert}{\lvert z' \rvert}$ z' non nul	$\lvert z+z' \rvert \le \lvert z \rvert + \lvert z' \rvert$	$\lvert z \rvert = 0$ ssi z = 0

Argument (z ≠o et z' ≠o) : $\boxed{\arg(z) = \theta = (\vec{u}, \overrightarrow{OM}) \text{ def. à } 2\pi \text{ près}}$ o n'a pas d'argument

$\arg(\bar{z}) = -\arg(z)\ (2\pi)$ $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ (2\pi)$	$\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ (2\pi)$ $\arg(z^n) = n \times \arg(z)\ (2\pi)$ $(n \in \mathbb{Z})$	$\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ (2\pi)$ $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ (2\pi)$

Bilan : $z = [r;\theta] = r\,e^{i\,\theta}$ et $z' = [r';\theta'] = r'\,e^{i\,\theta'}$ (z et z' non nuls)

$zz' = [\,rr', \theta+\theta'\,] = rr'\,e^{i\,(\theta+\theta')}$ $\dfrac{1}{z} = [\dfrac{1}{r}, -\theta] = \dfrac{1}{r}\,e^{-i\,\theta}$	$z^n = [\,r^n, n\theta] = r^n\,e^{i\,(n\theta)}$ $(n \in \mathbb{Z})$ $\dfrac{z}{z'} = [\,\dfrac{r}{r'}\,;\,\theta-\theta'] = \dfrac{r}{r'}\,e^{i\,(\theta-\theta')}$

Interprétation géométrique : M(z) M'(z') distincts et A(z_A) …..

$\arg(z_B - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AB})\ (2\pi)$	$\left\lvert \dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C} \right\rvert = \dfrac{AB}{CD}$
$\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = (\overrightarrow{OM'}, \overrightarrow{OM})\ (2\pi)$	$\arg\left(\dfrac{z_B - z_A}{z_D - z_C}\right) = (\overrightarrow{CD}, \overrightarrow{AB})$

Lieux

M appartient à l'axe des réels ssi : $\begin{cases} z = 0 \\ \text{ou } \arg(z) = 0\ (\pi) \end{cases}$

M appartient à l'axe des imaginaires purs ssi : $\begin{cases} z = 0 \\ \text{ou } \arg(z) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi) \end{cases}$

M appartient au cercle ***C***(centre A(z_A) ; rayon r) ssi $\quad$ AM = r

donc $\quad$ ssi $\quad$ $\lvert z - z_A \rvert = r$

Pour M(z) distinct de A(z_A) et B(z_B)

si $\arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_A - z}\right) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}\ (\pi)$ $\quad$ alors M ∈ au cercle ***C*** de diamètre [AB] privé de A et B.

si $\arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_A - z}\right) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$ $\quad$ alors M ∈ un arc AB du cercle C privé de A et B.

si $\arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_A - z}\right) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\ (\pi)$ $\quad$ alors M ∈ à la droite (AB) privée de A et B.

si $\arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_A - z}\right) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = 0\ (2\pi)$ $\quad$ alors M ∈ à la droite (AB) privée du segment [AB]

si $\arg\left(\dfrac{z_B - z}{z_A - z}\right) = (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) = \pi\ (2\pi)$ $\quad$ alors M ∈ au segment [AB] privé de A et B.

si $\left\lvert \dfrac{z - z_A}{z - z_B} \right\rvert = \dfrac{AM}{BM} = 1$ $\quad$ alors M∈ à la médiatrice du segment [AB].

Pour M(z) distinct de A(z_A), on pose $\vec{v}$ vecteur tel que $(\vec{u}, \vec{v}) = \theta\ (2\pi)$

Si $\arg(z - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \theta\ (\pi)$ $\quad$ alors M ∈ à la droite (A, $\vec{v}$) privée de A.

Si $\arg(z - z_A) = (\vec{u}, \overrightarrow{AM}) = \theta\ (2\pi)$ $\quad$ alors M ∈ à la demi-droite (A, $\vec{v}$) privée de A.

Transformations du plan (k réel non nul)

t : translation de vecteur $\vec{u}$ (z_0) : $\quad$ M'= t(M) ssi $\quad$ $z' = z + z_0$

r : rotation de centre A(z_A),d'angle α: $\quad$ M'= r(M) ssi $\quad$ $z' - z_A = e^{i\,\alpha}(z - z_A)$

h : homothétie de centre A(z_A), de rapport k : $\quad$ M'= h(M) ssi $\quad$ $z' - z_A = k(z - z_A)$

(la symétrie centrale est une rotation d'angle π)

rappel sur les angles (tout est mod 2 π et les vecteurs sont non nuls)

$(\vec{u}, \vec{u}) = o$ $\qquad$ $(\vec{v}, \vec{u}) = -(\vec{u}, \vec{v})$ $\qquad$ $(-\vec{u}, \vec{v}) = \pi + (\vec{u}, \vec{v})$

$(-\vec{u}, -\vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$

$(\vec{u}, \vec{w}) + (\vec{w}, \vec{v}) = (\vec{u}, \vec{v})$ (Chasles)