

PROBABILITES : variables aléatoires continues

Notations

- X est une variable aléatoire.
- $(X \leq a)$ est un évènement.
- $P(X \leq a)$ est la probabilité que l'évènement $(X \leq a)$ se réalise. C'est donc un NOMBRE entre 0 et 1

Fonction de répartition : F

$F(t) = P(X \leq t)$. C'est une fonction de IR dans $[0; 1]$

Propriétés de F

- F est croissante sur IR
- $P(a < X \leq b) = F(b) - F(a)$

Variable aléatoire continue (ou à densité).

Def : X est une v.a. à densité s'il existe une fonction f appelée densité de probabilité telle que

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f \text{ positive} \\ f \text{ continue} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1 \end{cases}$$

Variations indépendantes

X et Y v.a. à densité sont indépendantes si pour tous x et y réels on a : $P[(X \leq x) \cap (Y \leq y)] = P(X \leq x) \cdot P(Y \leq y)$

Espérance, variance, écart type

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x \cdot f(x) dx$$

$$V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - E(X))^2 \cdot f(x) dx \quad \text{et} \quad \sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

$$V(X) = E[(E - E(X))^2] \quad \text{ou} \quad V(X) = E(X^2) - E(X)^2$$

- Somme $aX + b$

Si X et Y sont des variables aléatoires quelconques, si a et b sont des réels ($a \neq 0$)

$$E(aX + b) = aE(X) + b$$

$$V(aX + b) = a^2 V(X)$$

$$\sigma(aX + b) = |a| \sigma(X)$$

- Somme de v.a.

Pour X et Y v.a. quelconques :

$$E(aX + bY) = aE(X) + bE(Y)$$

Pour X et Y **indépendantes** :

$$V(X + Y) = V(X) + V(Y) \quad (\text{si indépendantes})$$

$$V(X - Y) = V(X) + V(Y) \quad (\text{si indépendantes})$$

X_1, X_2, \dots, X_n sont des v.a. indépendantes, ayant même espérance m, et même écart type σ .

Alors la v.a. moyenne : $S_n = X_1 + X_2 + \dots + X_n$ est telle que :

$$\begin{cases} E(S_n) = nm \\ \sigma(S_n) = \sigma \sqrt{n} \end{cases}$$

- Produit XY

Si X et Y indépendantes : $E(XY) = E(X)E(Y)$

Loi normale $X \sim N(m; \sigma)$

quand X admet pour densité f définie par : $f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{x-m}{\sigma} \right)^2 \right]$ On a $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$

- $X^* = \frac{X-m}{\sigma} \sim N(0; 1)$ c'est la loi normale centrée réduite

- Somme de v.a. $X \sim N(m; \sigma)$ et $Y \sim N(m'; \sigma')$ alors : $(X + Y) \sim N(m + m'; \sqrt{\sigma^2 + \sigma'^2})$

Formules : $\pi(t) = P(X \leq t) = \int_{-\infty}^t f(x) dx$ et $P(X > t) = 1 - \pi(t)$

$$\pi(-t) = 1 - \pi(t) ; P(a < X < b) = \pi(b) - \pi(a) ; P(-a < X < a) = 2\pi(a) - 1$$

Echantillonnage

- Théorème

X_1, X_2, \dots, X_n sont des v.a. indépendantes, ayant même espérance m, et même écart type σ .

Alors la v.a. moyenne : $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ est telle que :

$$\begin{cases} E(M_n) = m \\ \sigma(M_n) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \end{cases}$$

- Exemple : si les $X_i \sim N(m; \sigma)$ alors $M_n \sim N(m; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

- Loi faible des grands nombres

X_1, X_2, \dots, X_n sont des v.a. indépendantes, ayant même espérance m, et même écart type σ .

Alors si la v.a. moyenne : $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$ on a

$$\forall \varepsilon > 0, \lim_{n \rightarrow +\infty} P(|M_n - m| < \varepsilon) = 1$$

- Théorème de la limite centrée

X_1, X_2, \dots, X_n sont des v.a. indépendantes, ayant même espérance m, et même écart type σ .

Soit la v.a. moyenne : $M_n = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$

Si n suffisamment grand, alors : $M_n \sim N(m; \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$

Loi de Bernoulli et loi binomiale, loi de poisson (v.a. discrètes)

- **Bernoulli** : Quand une v.a. X ne prend que deux valeurs 0 ou 1 on dit quelle suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = P(X=1)$.

- **Binomiale $B(n; p)$** : S est la somme de n variables de Bernoulli indépendantes et de même paramètre p, elle suit une loi binomiale de paramètres n et p.

$$P(S = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{mots clés (répétition, épreuves de bernoulli succès/échec, v.a. indép.)}$$

$$E(S) = np ; \sigma(S) = \sqrt{np(1-p)}$$

- **Loi de Poisson** : $P(\lambda)$ $P(X = k) = \frac{e^{-\lambda} \cdot \lambda^k}{k!}$ avec $E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$

Approximations : Sous certaines conditions précisées dans l'énoncé ($n > 30$ pour les 2 puis des cond. sur np, p, \dots)

- La loi binomiale approchée par la loi normale : $B(n, p)$ approchée par $N(np, \sqrt{np(1-p)})$
- La loi binomiale approchée par la loi de Poisson : $B(n, p)$ approchée par $P(np)$