Baccalauréat S Probabilités

Index des exercices de probabilité de 1999 à 2005

Tapuscrit : DENIS VERGÈS

Nº	Lieu et date	Q.C.M.	P. conditionelle	Variable aléatoire	Loi binomiale	Loi uniforme	Loi exponentielle	Suite	Géométrie
1	Amériquedu Nord juin 2005		×						
2	Antilles juin 2005	×	×						
3	Asie juin 2005		×						
4	Centres étr angers juin 2005		×		×				
5	France juin 2005	×	×	×					
6	La Réunion juin 2005		×						
7	Liban juin 2005			×					
8	Nlle–Calédonie mars 2005			×					
9	Polynésie juin 2005			×					
10	Amérique Sud nov. 2004		×						
11	France septembre 2004								
12	La Réunion septembre 2004								
13	Polynésie septembre 2004								
14	Amérique du Nord juin 2004			×					
15	France juin 2004						×		
16	Liban juin 2004		×		×	×			
17	Polynésie juin 2004		×				×		
18	Pondichéry juin 2004		×		×				
19	La Réunion juin 2004	×					×		
20	Amérique Sud nov. 2003								×
21	Nlle-Calédonie nov. 2003				×				
22	Antilles septembre 2003			×	×				
23	France septembre 2003			×	×	×			
24	Amérique du Nord juin 2003						×		
25	Antilles juin 2003		×				×		
26	Centres étrangers juin 2003			×			×		
27	La Réunion juin 2003		×	×	×				
28	Liban juin 2003				×			×	
29	Polynésie juin 2003				×				×
30	Nlle-Calédonie mars 2003		×					×	
31	Amérique Sud déc. 2002		×						
32	Nlle-Calédonie nov. 2002			×					
33	France septembre 2002		×	×					
34	Amérique du Nord juin 2002	×	×	×					
35	Antilles juin 2002			×	×				
36	Asie juin 2002			×				×	
37	France juin 2002		×					×	×
38	La Réunion juin 2002		×		×				
39	Polynésie juin 2002			×					
40	Pondichéry juin 2002			×					
41	Amérique Sud déc.2001								
42	Antilles septembre2001					×			
43	Antilles juin 2001			×					
44	Asie juin 2001			×					
45	Centres étrangers juin 2001			×					
46	France juin 2001								×
47	Liban juin 2001		×		×				
48	Polynésie juin 2001			×	×				
49	Amérique Sud nov. 2000				×				

Index des exercices de probabilité de 1999 à 2005

Tapuscrit : DENIS VERGÈS

N°	Lieu et date	Q.C.M.	P. conditionelle	Variable aléatoire	Loi binomiale	Loi uniforme	Loi exponentielle	Suite	Géométrie
50	Antilles septembre 2000							×	
51	France septembre 2000		×						
52	Polynésie septembre 2000		×						
53	Antilles juin 2000			×					
54	Asie juin 2000		×					×	
55	Centres étrangers juin 2000			×					
56	France juin 2000		×		×				
57	Liban juin 2000			×					
58	Polynésie juin 2000		×						
59	Pondichéry juin 2000		×						
60	Amérique Sud nov. 1999		×						
61	Antilles septembre 1999								
62	France septembre 1999				×				
63	Sportifs ht-niveau sept. 1999								

1. Amérique du Nord juin 2005

On dispose d'un dé cubique équilibré dont une face porte le numéro 1, deux faces portent le numéro 2 et trois faces portent le numéro 3.

On dispose également d'une urne contenant dix boules indiscernables au toucher, portant les lettres L, O, G, A, R, I, T, H, M, E (soit quatre voyelles et six consonnes).

Un joueur fait une partie en deux étapes :

Première étape : il jette le dé et note le numéro obtenu.

Deuxième étape :

• si le dé indique 1, il tire au hasard une boule de l'urne. Il gagne la partie si cette boule porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

• si le dé indique 2, il tire au hasard et simultanément deux boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces deux boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

• si le dé indique 3, il tire au hasard et simultanément trois boules de l'urne. Il gagne la partie si chacune de ces trois boules porte une voyelle et il perd dans le cas contraire.

À la fin de chaque partie, il remet dans l'urne la ou les boules tirée(s).

On définit les évènements suivants :

D_1 : « le dé indique 1 » D_2 : « le dé indique 2 »
D_3 : « le dé indique 3 » G : « la partie est gagnée ».

A et B étant deux évènements tels que $p(A) \neq 0$, on note $p_A(B)$ la probabilité de B sachant que A est réalisé.

1. **a.** Déterminer les probabilités $p_{D_1}(G)$, $p_{D_2}(G)$, et $p_{D_3}(G)$

   b. Montrer alors que $p(G) = \dfrac{23}{180}$.

2. Un joueur a gagné la partie. Calculer la probabilité qu'il ait obtenu le numéro 1 avec le dé.

3. Un joueur fait six parties. Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur arrondie à 10^{-2} près.

   Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,9 ?

2. Antilles juin 2005

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions ; chacune comporte trois réponses, une seule est exacte. On notera sur la copie uniquement la lettre correspondant â la réponse choisie.

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.

40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.

Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. La probabilité que le lecteur choisisse un roman policier est :

   a. $0,4$ **b.** $0,75$ **c.** $\dfrac{1}{150}$

2. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

   a. $0,3$ **b.** $0,8$ **c.** $0,4$

3. La probabilité que Ie lecteur choisisse un roman policier français est

   a. $1,15$ **b.** $0,4$ **c.** $0,3$

4. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

   a. $0,9$ **b.** $0,7$ **c.** $0,475$

5. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

   a. $\dfrac{4}{150}$ **b.** $\dfrac{12}{19}$ **c.** $0,3$

6. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

   a. $1-(0,25)^{20}$ **b.** $20 \times 0,75$ **c.** $0,75 \times (0,25)^{20}$

3. Asie juin 2005

Une association organise une loterie pour laquelle une participation m exprimée en euros est demandée.

Un joueur doit tirer simultanément au hasard, deux boules dans une urne contenant 2 boules vertes et 3 boules jaunes.

Si le joueur obtient deux boules de couleurs différentes, il a perdu.

Si le joueur obtient deux boules jaunes, il est remboursé de sa participation m.

Si le joueur obtient 2 boules vertes, il peut continuer le jeu qui consiste à faire tourner une roue où sont inscrits des gains répartis comme suit :

- sur $\frac{1}{8}$ de la roue le gain est de 100 €,
- sur $\frac{1}{4}$ de la roue le gain est de 20 €,
- sur le reste le joueur est remboursé de sa participation m.

On appelle V l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules vertes ».

On appelle J l'évènement « le joueur a obtenu 2 boules jaunes ».

On appelle R l'évènement « le joueur est remboursé de sa participation et ne gagne rien ».

1. Quelques calculs.

a. Calculer les probabilités $P(\text{V})$ et $P(\text{J})$ des évènements respectifs V et J.

b. On note $P_{\text{V}}(\text{R})$ la probabilité pour le joueur d'être remboursé sachant qu'il a obtenu deux boules vertes. Déterminer $P_{\text{V}}(\text{R})$ puis $P(\text{R} \cap \text{V})$.

c. Calculer $P(\text{R})$.

d. Calculer la probabilité de gagner les 100 €, puis la probabilité de gagner les 20 € de la roue.

2. On appelle X la variable aléatoire donnant le gain algébrique du joueur c'est-à-dire la différence entre les sommes éventuellement perçues et la participation initiale m.

a. Donner les valeurs prises par la variable aléatoire X.

b. Donner la loi de probabilité de la variable aléatoire X et vérifier que $p(X = -m)$ est 0,6.

c. Démontrer que l'espérance mathématique de la variable aléatoire X est $\text{E}(X) = \dfrac{140 - 51m}{80}$.

d. L'organisateur veut fixer la participation m à une valeur entière en euro. Quelle valeur minimale faut-il donner à m pour que l'organisateur puisse espérer ne pas perdre d'argent ?

3. Un joueur se présente et décide de jouer 4 fois, quels que soient les résultats obtenus.

   Calculer la probabilité qu'il perde au moins une fois sa mise.

4. On voudrait qu'un joueur ait plus d'une chance sur deux d'être remboursé de sa mise ou de gagner quand il joue une seule fois. On note G cet évènement. Pour cela on garde deux boules vertes dans l'urne mais on modifie le nombre de boules jaunes. On appelle n le nombre de boules jaunes, on suppose $n \geqslant 1$. Calculer la valeur minimale de n pour que la condition précédente soit vérifiée.

4. Centres étrangers juin 2005

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits.

On admet que lors du premier appel téléphonique, la probabilité que le correspondant ne décroche pas est 0,4 et que s'il décroche, la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire est 0,3.

On pourra construire un arbre pondéré.

1. On note :

• D_1 l'évènement : « la personne décroche au premier appel » ;

• R_1 l'évènement « la personne répond au questionnaire lors du premier appel ».

Calculer la probabilité de l'évènement R_1.

2. Lorsqu'une personne ne décroche pas au premier appel, on la contacte une seconde fois. La probabilité pour que le correspondant ne décroche pas la seconde fois est 0,3 et la probabilité pour qu'il réponde au questionnaire sachant qu'il décroche est 0,2. Si une personne ne décroche pas lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

On note :

• D_2 l'évènement : « la personne décroche au second appel ».

• R_2 l'évènement : « la personne répond au questionnaire lors du second appel ».

• R l'évènement : « la personne répond au questionnaire ».

Montrer que la probabilité de l'évènement R est 0,236.

3. Sachant qu'une personne a répondu au questionnaire, calculer la probabilité pour que la réponse ait été donnée lors du premier appel. (on donnera la réponse arrondie au millième)

4. Un enquêteur a une liste de 25 personnes à contacter. Les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Quelle est la probabilité pour que 20 % des personnes répondent au questionnaire ? (on donnera la réponse arrondie au millième)

5. France juin 2005

Pour les questions 1 *et* 2, *on donnera les résultats sous forme de fraction et sous forme décimale approchée par défaut à* 10^{-3} *près.*

Un enfant joue avec 20 billes : 13 rouges et 7 vertes. Il met 10 rouges et 3 vertes dans une boîte cubique et 3 rouges et 4 vertes dans une boîte cylindrique.

1. Dans un premier jeu, il choisit simultanément trois billes au hasard dans la boîte cubique et il regarde combien de billes rouges il a choisies. On appelle X la variable aléatoire correspondant au nombre de billes rouges choisies.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Un deuxième jeu est organisé de telle sorte que l'enfant choisisse d'abord au hasard une des deux boîtes, puis qu'il prenne alors une bille, toujours au hasard, dans la boîte choisie. On considère les évènements suivants :

C1 : « L'enfant choisit la boîte cubique »,

C2 : « L'enfant choisit la boîte cylindrique »,

R : « L'enfant prend une bille rouge »,

V : « L'enfant prend une bille verte ».

a. Représenter par un arbre pondéré la situation correspondant à ce deuxième jeu.

b. Calculer la probabilité de l'évènement R.

c. Sachant que l'enfant a choisi une bille rouge, quelle est la probabilité qu'elle provienne de la boîte cubique ?

3. L'enfant reproduit n fois de suite son deuxième jeu, en remettant à chaque fois la bille tirée à sa place.

a. Exprimer, en fonction de n, la probabilité p_n que l'enfant ait pris au moins une bille rouge au cours de ses n choix.

b. Calculer la plus petite valeur de n pour laquelle $p_n \geqslant 0,99$.

6. La Réunion juin 2005

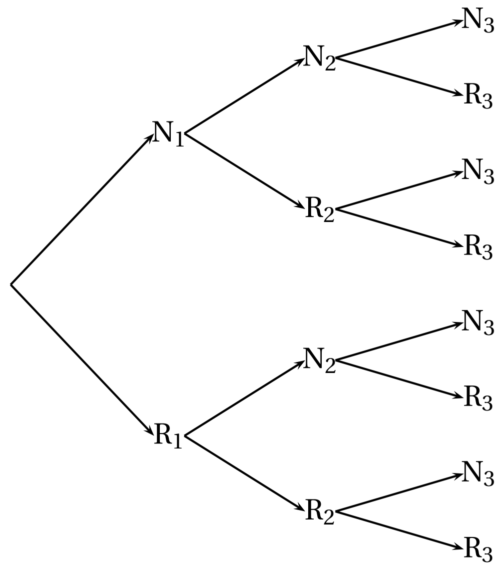
On considère trois urnes U_1, U_2, et U_3.

L'urne U_1 contient deux boules noires et trois boules rouges ; l'urne U_2 contient une boule noire et quatre boules rouges ; l'urne U_3 contient trois boules noires et quatre boules rouges.

Une expérience consiste à tirer au hasard une boule de U_1 et une boule de U_2, à les mettre dans U_3, puis à tirer au hasard une boule de U_3.

Pour i prenant les valeurs 1, 2 et 3, on désigne par N_i, (respectivement R_i) l'évènement « on tire une boule noire de l'urne U_i » (respectivement « on tire une boule rouge de l'urne U_i »).

1. Reproduire et compléter l'arbre de probabilités suivant :



2. **a.** Calculer la probabilité des évènements $N_1 \cap N_2 \cap N_3$, et $N_1 \cap R_2 \cap N_3$.

b. En déduire la probabilité de l'évènement $N_1 \cap N_3$.

c. Calculer de façon analogue la probabilité de l'évènement $R_1 \cap N_3$.

3. Déduire de la question précédente la probabilité de l'évènement N_3.

4. Les évènements N_1 et N_3 sont-ils indépendants ?

5. Sachant que la boule tirée dans U_3 est noire, quelle est la probabilité que la boule tirée de U_1 soit rouge ?

7. Liban juin 2005

Un fabricant d'écrans plasma teste une première fois ses appareils à la sortie de la chaîne de fabrication.

Si le test est positif (c'est-à-dire si l'écran fonctionne correctement), l'écran est acheminé chez le client. Sinon l'écran retourne en usine où il est réparé puis testé une seconde fois. Si ce deuxième test est positif, l'écran est acheminé chez le client, sinon il est détruit.

Une étude statistique a permis de montrer que le test est positif pour 70 % des écrans neufs sortis directement des chaînes de fabrication, mais que parmi les écrans réparés, seulement 65 % d'entre eux passent le second test avec succès.

On note T_1 l'évènement : « le premier test est positif ».

On note C l'évènement : « l'écran est acheminé chez le client ».

1. On choisit un écran au hasard à la sortie de la chaîne de fabrication.
Déterminer les probabilités des évènements T_1, et C.

2. La fabrication d'un écran revient à 1 000 € au fabricant si l'écran n'est testé qu'une fois.
Cela lui coûte 50 € de plus si l'écran doit être testé une seconde fois.
Un écran est facturé a euros (a étant un réel positif) au client.
On introduit la variable aléatoire X qui, à chaque écran fabriqué, associe le « gain » (éventuellement négatif) réalisé par le fabricant.

- **a.** Déterminer la loi de probabilité de X en fonction de a.
- **b.** Exprimer l'espérance de X en fonction de a.
- **c.** À partir de quelle valeur de a, l'entreprise peut-elle espérer réaliser des bénéfices ?

8. Nouvelle–Calédonie mars 2005

Une compagnie de transport désire optimiser les contrôles afin de limiter l'impact des fraudes et les pertes occasionnées par cette pratique.

Cette compagnie effectue une étude basée sur deux trajets par jour pendant les vingt jours ouvrables d'un mois soit au total quarante trajets. On admet que les contrôles sont indépendants les uns des autres et que la probabilité pour tout voyageur d'être contrôlé est égale à p.

Le prix de chaque trajet est de dix euros, en cas de fraude l'amende est de cent euros.

Claude fraude systématiquement lors des quarante trajets soumis à cette étude.

Soit X_i la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si Claude est contrôlé au i-ème trajet et la valeur 0 sinon. Soit X la variable aléatoire définie par $X = X_1 + X_2 + X_3 + \cdots + X_{40}$.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.

2. Dans cette partie on suppose que $p = \dfrac{1}{20}$.

a. Calculer l'espérance mathématique de X.

b. Calculer les probabilités $P(X = 0)$, $P(X = 1)$ et $P(X = 2)$.

c. Calculer à 10^{-4} près la probabilité pour que Claude soit contrôlé au plus deux fois.

3. Soit Z_i la variable aléatoire qui prend pour valeur le gain algébrique réalisé par le fraudeur.

Justifier l'égalité $Z = 400 - 100X$ puis calculer l'espérance mathématique de Z pour $p = \dfrac{1}{5}$.

4. On désire maintenant déterminer p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure à 99 %.

a. Démontrer que $P(X \leqslant 2) = (1-p)^{38}\left(741p^2 + 38p + 1\right)$.

b. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,1]$ par : $f(x) = (1-x)^{38}\left(741x^2 + 38x + 1\right)$. Montrer que f est strictement décroissante sur $[0\,;\,1]$ et qu'il existe un unique réel x_0 appartenant à l'intervalle $[0\,;\,1]$ tel que $f(x_0) = 0{,}01$. Déterminer l'entier naturel n tel que $\dfrac{n}{100} < x_0 < \dfrac{n+1}{100}$.

c. En déduire la valeur minimale qu'il faut attribuer à p afin que la probabilité que Claude subisse au moins trois contrôles soit supérieure ou égale à 99 %.

(On exprimera p en fonction de x_0).

9. Polynésie juin 2005

Une usine d'horlogerie fabrique une série de montres.

Au cours de la fabrication peuvent apparaître deux types de défauts, désignés par a et b.

2 % des montres fabriquées présentent le défaut a et 10 % le défaut b.

Une montre est tirée au hasard dans la production. On définit les évènements suivants :

A : « la montre tirée présente le défaut a » ;

B : « la montre tirée présente le défaut b » ;

C : « la montre tirée ne présente aucun des deux défauts » ;

D : « la montre tirée présente un et un seul des deux défauts ».

On suppose que les évènements A et B sont indépendants.

1. Montrer que la probabilité de l'évènement C est égale à 0,882.
2. Calculer la probabilité de l'évènement D.
3. Au cours de la fabrication, on prélève au hasard successivement cinq montres.

   On considère que le nombre de montres fabriquées est assez grand pour que l'on puisse supposer que les tirages se font avec remise et sont indépendants.

   Soit X la variable aléatoire qui, à chaque prélèvement de cinq montres, associe le nombre de montres ne présentant aucun des deux défauts a et b.

   On définit l'évènement E : « quatre montres au moins n'ont aucun défaut ».

   Calculer la probabilité de l'évènement E. On en donnera une valeur approchée à 10^{-3} près.

10. Amérique du Sud novembre 2004

On note $p_{\mathrm{A}}(\mathrm{B})$ *la probabilité conditionnelle de l'évènement* B *sachant que l'évènement* A *est réalisé.*

Une urne contient 4 boules rouges et 2 boules noires indiscernables au toucher.

1. On effectue au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.

On note A_0 l'évènement ; « on n'a obtenu aucune boule noire » ;

On note A_1 l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire » ;

On note A_2 l'évènement : « on a obtenu deux boules noires ».

Calculer les probabilités de A_0, A_1 et A_2.

2. Après ce premier tirage, il reste donc 4 boules dans l'urne.

On effectue à nouveau au hasard un tirage sans remise de deux boules de l'urne.

On note B_0 l'évènement : « on n'a obtenu aucune boule noire au tirage n$^{\mathrm{o}}$ 2 »

On note B_1 l'évènement : « on a obtenu une seule boule noire au tirage n$^{\mathrm{o}}$ 2 »

On note B_2 l'évènement : « on a obtenu deux boules noires au tirage n$^{\mathrm{o}}$ 2 »

- **a.** Calculer $p_{\mathrm{A}_0}(\mathrm{B}_0)$, $p_{\mathrm{A}_1}(\mathrm{B}_0)$ et $p_{\mathrm{A}_2}(\mathrm{B}_0)$.
- **b.** En déduire $p(\mathrm{B}_0)$.
- **c.** Calculer $p(\mathrm{B}_1)$ et $p(\mathrm{B}_2)$.
- **d.** On a obtenu une seule boule noire lors de ce second tirage. Quelle est la probabilité d'avoir obtenu une seule boule noire lors du premier ?

3. On considère l'évènement R : « il a fallu exactement les deux tirages pour que les deux boules noires soient extraites de l'une ».

Montrer que $p(\mathrm{R}) = \dfrac{1}{3}$.

11. France septembre 2004

1. Soit une particule au hasard.
   Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A1 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K1 »,
   A2 : « la particule isolée est de type A et elle entre dans K2 »,
   B1 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K1 »,
   B2 : « la particule isolée est de type B et elle entre dans K2 »,
   C1 : « la particule entre dans K1 »,
   C2 : « la particule entre dans K2 ».
2. On procède cinq fois de suite et de façon indépendante à l'épreuve décrite en introduction.
   Le nombre de particules étant très grand, on admettra que les proportions 75 % et 25 % restent constantes.
   Calculer la probabilité de l'évènement E suivant : « il y a exactement deux particules dans K2 ».

Partie B

Un récipient contient le gaz décrit précédemment. Les particules A sont radioactives et se transforment spontanément en particules B ; chaque particule A donne en se transformant une particule B.

On note $p(t)$ la proportion de particules A dans le gaz. Ainsi, à l'instant $t = 0$, on a $p(0) = 0,75$.

Plus généralement, si t est exprimé en années, on a $p(t) = 0,75\mathrm{e}^{-\lambda t}$, où λ est une constante réelle.

La demi-vie [1] des particules de type A est égale à 5 730 ans.

1. Calculer λ ; on prendra une valeur approchée décimale à 10^{-5} près par défaut.
2. Au bout de combien d'années 10% des particules de type A se seront-elles transformées en particules de type B ?
3. Déterminer la valeur de t pour laquelle il y aura autant de particules de type A que de particules de type B (on arrondira à l'unité).

[1] temps au bout duquel le nombre de particules restantes est la moitié du nombre initial.

12. La Réunion septembre 2004

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

ll y a trois boules noires dans l'urne U_1,deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la façon suivante :

le joueur lance le dé,

- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 ;
- s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1 » ;

B : « Le dé amène un multiple de trois » ;

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni le lui un multiple de trois » ;

N : « La boule tirée est noire ».

1. Le joueur joue une partie.

  a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\dfrac{5}{3k}$.

  b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

  c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

  d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\dfrac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\dfrac{1}{30}$.

Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.

Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

13. Polynésie septembre 2004

On donne dans le plan trois points A, B et C distincts non alignés.

Une urne U contient six cartons indiscernables au toucher portant les nombres $-2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2$ et 3.

Une urne V contient cinq cartons indiscernables au toucher ; quatre cartons portent le nombre 1 et un carton le nombre -1.

On tire au hasard un carton dans chacune des urnes. Les tirages sont équiprobables. On note a le nombre lu sur le canon de U et b celui lu sur le carton de V.

1. Justifier que les points pondérés (A, a), (B, b) et (C, 4) admettent un barycentre. On le note G.
2. **a.** Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   E_1 « G appartient à la droite (BC) » ;
   E_2 « G appartient au segment [BC] ».

   b. Montrer que la probabilité de l'évènement E_3 : « G est situé à l'intérieur du triangle ABC et n'appartient à aucun des côtés » est égale à $\dfrac{2}{5}$. On pourra faire appel des considérations de signe.
3. Soit n un entier naturel non nul. On répète n fois dans les mêmes conditions l'épreuve qui consiste à tirer un carton dans chacune des urnes U et V puis à considérer le barycentre G de la question **1.**.
   On désigne par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre de réalisations de l'évènement E_3.

   a. Déterminer l'entier n pour que l'espérance de la variable aléatoire X soit égale à 4.

   b. Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité d'avoir au moins un des barycentres situé à l'intérieur du triangle ABC soit supérieure ou égale à $0,999$.

14. Amérique du Nord juin 2004

Un jeu de hasard est formé d'un dispositif lançant de façon aléatoire une fléchette dans une cible ayant la forme suivante :

B	B	B	B	B	B	B	B	B	J	J	J	V	V	R
R	V	V	J	J	J	B	B	B	B	B	B	B	B	B

La fléchette atteint toujours une case et une seule.

Les trente cases, blanches (B), *jaunes* (J), *vertes* (V) *ou rouges* (R), *ont toutes la même probabilité d'être atteintes.*

Si la fléchette atteint une case rouge, le joueur gagne 8 euros.

Si la fléchette atteint une case verte, le joueur gagne 5 euros.

Si la fléchette atteint une case jaune, le joueur ne gagne rien et ne perd rien.

Si la fléchette atteint une case blanche, le joueur perd a euros, la lettre a désigne un nombre réel positif.

1. On note X la variable aléatoire représentant le gain algébrique du joueur (compté négativement quand il perd).

a. Donner la loi de probabilité de X.

b. Calculer a pour que le jeu soit équitable, c'est-à-dire pour que l'espérance $\mathrm{E}(X)$ soit nulle.

2. Un joueur est considéré comme gagnant s'il a obtenu un gain strictement positif.

a. Quelle est la probabilité p qu'un joueur gagne ?

b. Un joueur joue 5 parties consécutives indépendantes. Quelle est la probabilité qu'il gagne exactement 2 fois ? exactement 5 fois ?

c. Quel est le nombre moyen de parties gagnantes dans la situation décrite en **2. b.** ?

15. France juin 2004

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique. On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$: la probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est

$$p([0\ ;\ t[) = \int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x.$$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50 % d'un lot important de ces composants sont encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser $p([0\ ;\ 200[) = 0,5$.

1. Montrer que $\lambda = \dfrac{\ln 2}{200}$.

2. Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure ? 300 semaines ? On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

3. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

a. Montrer que $\displaystyle\int_0^A \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{-\lambda A\mathrm{e}^{-\lambda A} - \mathrm{e}^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$.

b. En déduire d_m on donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale ? la semaine près.

16. Liban juin 2004

Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique).

12 % des personnels sont des médecins et 71 % sont des soignants.

67% des médecins sont des hommes et 92% des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.

1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.
   a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
   b. Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
   c. On sait que 80 % du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.
   En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.
2. Tout le personnel de cet hôpital a un temps de trajet domicile-hôpital au plus égal à une heure et on suppose que la durée exacte du trajet est une variable aléatoire uniformément répartie sur $[0\,;\,1]$.
   On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital. Quelle est la probabilité pour que la personne interrogée ait une durée de trajet comprise entre 15 min et 20 min ?
3. Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).
   Quelle est la probabilité que, sur les 40 courriers envoyés, 10 exactement soient reçus par des médecins ?

17. Polynésie juin 2004

Le laboratoire de physique d'un lycée dispose d'un parc d'oscilloscopes identiques. La durée de vie en années d'un oscilloscope est une variable aléatoire notée X qui suit la « loi de durée de vie sans vieillissement » (ou encore loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

Toutes les probabilités seront données à 10^{-3} près.

1. Sachant que $p(X > 10) = 0,286$, montrer qu'une valeur approchée à 10^{-3} près de λ est $0,125$.

On prendra $0,125$ pour valeur de λ dans la suite de l'exercice.

2. Calculer la probabilité qu'un oscilloscope du modèle étudié ait une durée de vie inférieure à 6 mois.

3. Sachant qu'un appareil a déjà fonctionné huit années, quelle est la probabilité qu'il ait une durée de vie supérieure dix ans ?

4. On considère que la durée de vie d'un oscilloscope est indépendante de celle des autres appareils. Le responsable du laboratoire décide de commander 15 oscilloscopes. Quelle est la probabilité qu'au moins un oscilloscope ait une durée de vie supérieure â 10 ans ?

5. Combien l'établissement devrait-il acheter d'oscilloscopes pour que la probabilité qu'au moins l'un d'entre eux fonctionne plus de 10 ans soit supérieure à 0,999 ?

Rappel :

Loi exponentielle de paramètre λ *sur* $[0\,;\,+\infty[$, *dite aussi loi de durée de vie sans vieillissement* :

pour $0 \leqslant a \leqslant b,\ p([a\,;\,b]) = \displaystyle\int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ et

pour $c \geqslant 0,\ p([c\,;\,+\infty[) = 1 - \displaystyle\int_0^c \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

18. Pondichéry juin 2004

Un joueur dispose d'un dé cubique bien équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6, et de trois urnes U_1, U_2 et U_3 contenant chacune k boules, où k désigne un entier naturel supérieur ou égal à 3.

Il y a trois boules noires dans l'urne U_1, deux boules noires dans l'urne U_2 et une boule noire dans l'urne U_3, et toutes les autres boules contenues dans les urnes sont blanches.

Les boules sont indiscernables au toucher.

Une partie se déroule de la façon suivante :

le joueur lance le dé,

- s'il obtient le numéro 1, il prend au hasard une boule dans l'urne U_1, note sa couleur et la remet dans l'urne U_1 ;
- s'il obtient un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_2, note sa couleur et la remet dans l'urne U_2 ;
- si le numéro amené par le dé n'est ni le 1 ni un multiple de trois, il prend au hasard une boule dans l'urne U_3, note sa couleur et la remet dans l'urne U_3.

On désigne par A, B, C, et N les évènements suivants :

A : « Le dé amène le numéro 1. »

B : « Le dé amène un multiple de trois. »

C : « Le dé amène un numéro qui n'est ni le 1, ni un multiple de 3. »

N : « La boule tirée est noire.»

1. Le joueur joue une partie.

a. Montrer que la probabilité qu'il obtienne une boule noire est égale à $\dfrac{5}{3k}$.

b. Calculer la probabilité que le dé ait amené le 1 sachant que la boule tirée est noire.

c. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit supérieure à $\dfrac{1}{2}$.

d. Déterminer k pour que la probabilité d'obtenir une boule noire soit égale à $\dfrac{1}{30}$.

2. Dans cette question, k est choisi pour que la probabilité d'obtenir une boule noire en jouant une partie soit égale à $\dfrac{1}{30}$.

Le joueur joue 20 parties, indépendantes les unes des autres.

Calculer, sous forme exacte puis arrondie à 10^{-3}, la probabilité qu'il obtienne au moins une fois une boule noire.

19. La Réunion juin 2004

Pour chaque question, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur la copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point ; une réponse inexacte enlève un demi-point ; l'absence de réponse est comptée 0 point.

Si le total est négatif, la note est ramenée à 0.

Première partie

Pour réaliser des étiquettes de publipostage, une entreprise utilise deux banques de données :

B_1, contenant 6000 adresses, dont 120 sont erronées et 5 880 sont exactes,

B_2, contenant 4 000 adresses, dont 200 sont erronées et 3800 sont exactes.

1. On prélève au hasard, avec remise, 10 étiquettes parmi les 6 000 réalisées à l'aide de B_1. La probabilité qu'exactement trois de ces étiquettes comportent une adresse erronée est :

$$\text{A} : \frac{\binom{120}{3}+\binom{5880}{7}}{\binom{6000}{10}} \qquad \text{B} : \frac{3}{120}$$

$$\text{C} : \binom{10}{3}\times\left(\frac{120}{6000}\right)^3\times\left(\frac{5880}{6000}\right)^7 \qquad \text{D} : \binom{10}{3}\times\left(\frac{3}{120}\right)^3\times\left(\frac{7}{5880}\right)^7$$

2. Parmi les 10 000 étiquettes, on en choisit une au hasard. Sachant que l'étiquette comporte une adresse exacte, la probabilité qu'elle ait été réalisée à l'aide de B_1 est :

$$\text{A} : 0,98 \qquad \text{B} : \frac{0,4\times 0,95}{0,6\times 0,98+0,6\times 0,02} \qquad \text{C} : 0,6\times 0,98 \qquad \text{D} : \frac{0,6\times 0,98}{0,6\times 0,98+0,4\times 0,95}$$

Deuxième partie

La durée de vie, exprimée en heures, d'un robot jusqu'à ce que survienne la première panne est modélisée par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$ (loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,000\,5$). Ainsi la probabilité que le robot tombe en panne avant l'instant t est :

$$p([0\ ;\ t[) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x}\,dx.$$

1. La probabilité qu'un robot ait une durée de vie supérieure à 2 500 heures est :

$$\text{A} : e^{-\frac{2500}{2000}} \qquad \text{B} : e^{\frac{5}{4}} \qquad \text{C} : 1-e^{-\frac{2500}{2000}} \qquad \text{D} : e^{-\frac{2000}{2500}}$$

2. La durée de vie moyenne d'un robot ménager est donnée par la formule : $\mathrm{E} = \lim\limits_{t \to +\infty} \int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

a. L'intégrale $\lim\limits_{t \to +\infty} \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$ est égale à :

A : $\lambda \dfrac{t^2}{2}\mathrm{e}^{-\lambda t}$ B : $-t\mathrm{e}^{-\lambda t} - \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{\lambda} + \dfrac{1}{\lambda}$ C : $\lambda t \mathrm{e}^{-\lambda t} - \lambda \mathrm{e}^{-\lambda t} - \lambda$ D : $t\mathrm{e}^{-\lambda t} - \dfrac{\mathrm{e}^{-\lambda t}}{-\lambda}$

b. La durée de vie moyenne des robots, exprimée en heures, est :

A : 3 500 B : 2 000 C : 2 531,24 D : 3 000

20. Amérique du Sud novembre 2003

Un sac contient 4 jetons numérotés respectivement -1, 0, 0, 1 et indiscernables au toucher.

On tire un jeton du sac, on note son numéro x et on le remet dans le sac ; on tire un second jeton, on note son numéro y et on le remet dans le sac ; puis on tire un troisième jeton, on note son numéro z et on le remet dans le sac.

Tous les jetons ont la même probabilité d'être tirés.

À chaque tirage de trois jetons, on associe, dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ le point M de coordonnées (x, y, z).

Sur le graphique joint en annexe page 6, sont placés les 27 points correspondant aux différentes positions possibles du point M. Les coordonnées du point A sont $(1 ; -1 ; -1)$ dans le repère $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

On note $\mathscr{C}$ le cube ABCDEFGH.

1. Démontrer que la probabilité que le point M soit en A est égale à $\dfrac{1}{64}$.
2. On note E_1 l'évènement : « M appartient à l'axe des abscisses ».

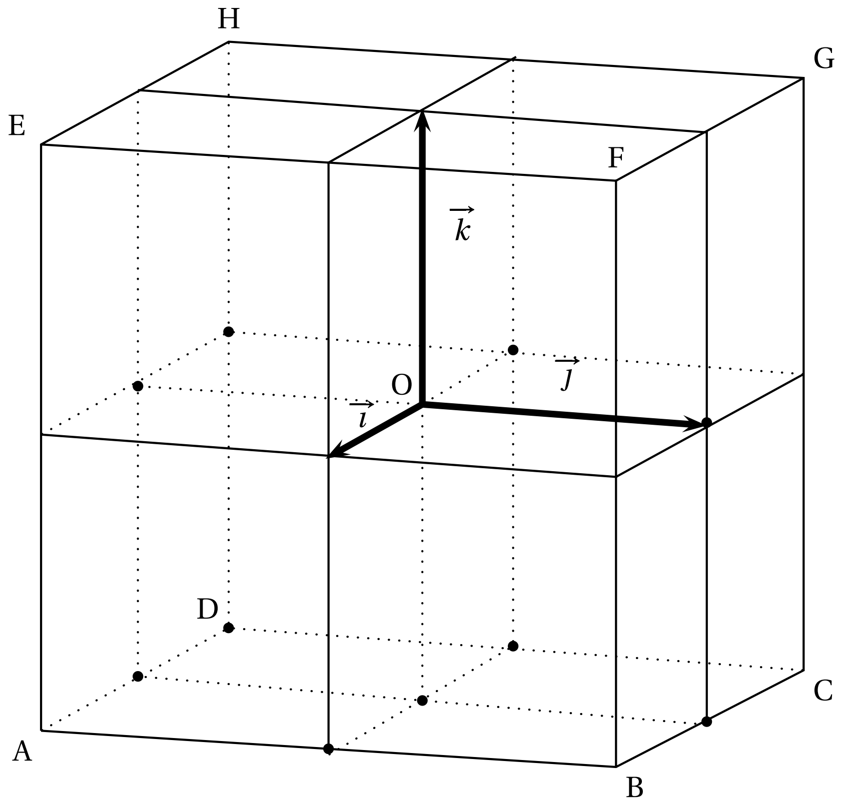
   Démontrer que la probabilité de E_1 est égale à $\dfrac{1}{4}$.
3. Soit $\mathscr{P}$ le plan passant par O et orthogonal au vecteur $\vec{n}\,(1 ; 1 ; 1)$.

   a. Déterminer une équation cartésienne du plan $\mathscr{P}$.

   b. Tracer en couleur sur le graphique de l'annexe, la section du plan $\mathscr{P}$ et du cube $\mathscr{C}$. (On ne demande pas de justification).

   c. On note E_2 l'évènement : « M appartient à $\mathscr{P}$ ».
   Quelle est la probabilité de l'évènement E_2 ?
4. On désigne par $\mathscr{B}$ la boule de centre O et de rayon 1,5 (c'est-à-dire l'ensemble des points M de l'espace tels que $OM \leqslant 1,5$).
   On note E_3 l'évènement : « M appartient à la boule $\mathscr{B}$ ».
   Déterminer la probabilité de l'évènement E_3.

Cette page ANNEXE sera complétée et remise avec la copie



21. Nouvelle–Calédonie novembre 2003

On observe sur une longue période le nombre d'accidents de scooters à un carrefour. Il est alors possible de proposer la modélisation suivante : pour n scooters franchissant le carrefour durant une année (n est un grand nombre inconnu), on admet que la variable aléatoire S_n qui totalise le nombre d'accidents de scooters à ce carrefour durant cette année suit une loi binomiale ; on estime que l'espérance mathématique de S_n notée $\text{E}(S_n)$ est égale â 10.

Soit p la probabilité pour un scooter d'être accidenté à ce carrefour pendant l'année considérée.

1. Calculer p, puis justifier l'égalité $\text{P}(S_n = k) = \binom{n}{k}\left(\dfrac{10}{n}\right)^k\left(1-\dfrac{10}{n}\right)^{n-k}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

2. **a.** Établir l'égalité $\ln[\text{P}(S_n = 0)] = -10 \times \dfrac{\ln\left(1-\dfrac{10}{n}\right)}{\dfrac{-10}{n}}$ où ln désigne la fonction logarithme népérien ; en déduire que $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{P}(S_n = 0) = \text{e}^{-10}$.

b. Démontrer que $\text{P}(S_n = k+1) = \text{P}(S_n = k) \times \dfrac{n-k}{n-10} \times \dfrac{10}{k+1}$, où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n-1$.

c. Démontrer que si $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{P}(S_n = k) = \text{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$, alors on a également $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{P}(S_n = k+1) = \text{e}^{-10}\dfrac{10^{k+1}}{(k+1)!}$ pour $0 \leqslant k+1 \leqslant n$.

d. Démontrer en utilisant un raisonnement par récurrence sur l'entier naturel k que $\lim\limits_{n\to+\infty} \text{P}(S_n = k) = \text{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ où k est un entier naturel tel que $0 \leqslant k \leqslant n$.

3. On suppose que le nombre n est suffisamment grand pour que l'on puisse admettre que $\text{e}^{-10}\dfrac{10^k}{k!}$ est une approximation acceptable de $\text{P}(S_n = k)$. Utiliser cette approximation pour calculer à 10^{-4} près la probabilité pour qu'au cours de cette année il y ait au moins trois accidents de scooters à ce carrefour.

22. Antilles–Guyane septembre 2003

Une association organise des promenades en montagne. Douze guides emmènent chacun, pour la journée, un groupe de personnes dès le lever du Soleil. L'été il y a plus de demandes que de guides et chaque groupe doit s'inscrire la veille de la promenade.

Mais l'expérience des dernières années prouve que la probabilité que chacun des groupes inscrits ne se présente pas au départ de la promenade est égale à $\frac{1}{8}$. On admettra que les groupes inscrits se présentent indépendamment les uns des autres.

Les probabilités demandées seront arrondies au 100^{e} *le plus proche.*

1. **a.** Montrer que la probabilité qu'un jour donné les 12 groupes inscrits soient tous présents est comprise entre 0,20 et 0,21.

   b. On désigne par X la variable aléatoire égale au nombre de jours où les 12 groupes inscrits se sont tous présentés au départ lors d'un mois de 30 jours. Montrer que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

   Donner la signification des évènements $X = 30$ puis $X = 0$ et calculer la probabilité de ces évènements.

   Préciser l'espérance mathématique $\text{E}(X)$

   Quelle signification peut-on donner à ce résultat ?

   c. Une somme de 1 Crédit (la monnaie locale) est demandée à chaque groupe pour la journée. Cette somme est réglée au départ de la promenade.

   Dans le cas où un groupe ne se présente pas au départ, l'association ne gagne évidemment pas le Crédit que ce groupe aurait versé pour la journée.

   On nomme S la variable aléatoire égale à la somme, en Crédits, perçue par l'association un jour donné.

   Calculer la probabilité de l'évènement $[S = 11]$.

   Préciser l'espérance mathématique de S.

2. **a.** Agacé par le nombre de guides inemployés, le dirigeant de l'association décide de prendre chaque jour une réservation supplémentaire. Évidemment si les 13 groupes inscrits se présentent, le 13^{e} groupe sera dirigé vers une activité de substitution. Toutefois, cette activité de remplacement entraîne une dépense de 2 Crédits à l'association.

   Quelle est a probabilité P_{13} qu'un jour donné il n'y ait pas de désistement, c'est-à-dire que les 13 groupes inscrits la veille se présentent au départ de la promenade ?

   b. Soit R la variable aléatoire égale au coût de l'activité de substitution.

   Préciser la loi de la variable aléatoire R et calculer son espérance mathématique.

c. Montrer que le gain moyen obtenu pour chaque jour est :

$$\left(\sum_{k=0}^{13} k \cdot \binom{k}{13} \left(\frac{7}{8}\right)^{k} \left(\frac{1}{8}\right)^{13-k}\right) - 2\text{P}_{13}.$$

Calculer ce gain.

d. La décision du dirigeant est-elle rentable pour l'association ?

23. France septembre 2003

Un commerce possède un rayon « journaux » et un rayon « souvenirs ». À la fin d'une journée, on trie les pièces de monnaie contenues dans les caisses de chaque rayon. On constate que la caisse du rayon « journaux » contient 3 fois plus de pièces de 1 € que celle du rayon « souvenirs ». Les pièces ont toutes le côté pile identique, mais le côté face differe et symbolise un des pays utilisant la monnaie unique. Ainsi, 40 % des pièces de 1 € dans la caisse du rayon « souvenirs » et 8 % de celle du rayon « journaux » portent une face symbolisant un pays autre que la France (on dira « face étrangère »).

1. Le propriétaire du magasin, collectionneur de monnaies, recherche les pièces portant une face étrangère. Pour cela il prélève au hasard et avec remise 20 pièces issues de la caisse « souvenirs ». On note X la variable aléatoire qui associe à chaque prélèvement le nombre de pièces portant une face « étrangère ».

   a. Expliquer pourquoi X suit une loi binomiale ; déterminer les paramètres de cette loi.

   b. Calculer la probabilité qu'exactement 5 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

   c. Calculer la probabilité qu'au moins 2 pièces parmi les 20 portent une face étrangère.

2. Les pièces de 1 € issues des deux caisses sont maintenant rassemblées dans un sac.
On prélève au hasard une pièce du sac.
On note S l'évènement « la pièce provient de la caisse souvenirs » et E l'évènement « la pièce porte une face étrangère ».

   a. Déterminer $P(S)$, $P_S(E)$; en déduire $P(S \cap E)$.

   b. Démontrer que la probabilité que la pièce porte une face étrangère est égale à 0,16.

   c. Sachant que cette pièce porte une face étrangère, déterminer la probabilité qu'elle provienne de la caisse « souvenirs ».

3. Dans la suite, la probabilité qu'une pièce choisie au hasard dans le sac porte une face étrangère est égale à 0,16.
Le collectionneur prélève n pièces (n entier supérieur ou égal à 2) du sac au hasard et avec remise.
Calculer n pour que la probabilité qu'il obtienne au moins une pièce portant une face étrangère soit supérieure ou égale à 0,9.

24. Amérique du Nord juin 2003

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples constitué de six questions : chacune comporte trois réponses, une et une seule tant exacte.

Les réponses à cet exercice sont à inscrire dans la feuille jointe en annexe, page 5, en cochant pour chaque question la case correspondante à la réponse proposée.

Toute réponse ambiguë sera considérée comme une absence de réponse. Toute réponse exacte entraîne une bonification, toute erreur est pénalisée.

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en années, d'un appareil ménager avant la première panne. On peut modéliser cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement, définie sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Ainsi, la probabilité d'un intervalle $[0,\ t[$, notée $p([0,\ t[)$, est la probabilité que l'appareil ménager tombe en panne avant l'instant t.

Cette loi est telle que $p([0,\ t[) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$, où t est un nombre réel positif représentant le nombre d'années (loi exponentielle de paramètre λ, avec $\lambda > 0$).

1. Pour $t \geqslant 0$, la valeur exacte de $p([t,\ +\infty[)$ est :

a. $1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}$ **b.** $\mathrm{e}^{-\lambda t}$ **c.** $1 + \mathrm{e}^{-\lambda t}$

2. La valeur de t pour laquelle on a $p([0,\ t[) = p([t,\ +\infty[)$ est :

a. $\dfrac{\ln 2}{\lambda}$ **b.** $\dfrac{\lambda}{\ln 2}$ **c.** $\dfrac{\lambda}{2}$

3. D'après une étude statistique, la probabilité que l'appareil tombe en panne avant la fin de la première année est 0,18. La valeur exacte de λ est alors :

a. $\ln\left(\dfrac{50}{41}\right)$ **b.** $\ln\left(\dfrac{41}{50}\right)$ **c.** $\dfrac{\ln(82)}{\ln(100)}$

4. Sachant que cet appareil n'a connu aucune panne au cours des deux premières années après sa mise en service, la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne l'année suivante est :

a. $p([1,\ +\infty[)$ **b.** $p([3, +\infty[)$ **c.** $p([2\ ;\ 3[$

Dans la suite de l'exercice on prendra $\lambda = 0,2$.

5. La probabilité que l'appareil n'ait pas eu de panne au cours des trois premières années, arrondie à 10^{-4} près, est :

a. $0,5523$ **b.** $0,5488$ **c.** $0,4512$

6. Dix appareils neufs de ce type ont été mis en service en même temps. On désigne par X la variable alatoire égale au nombre d'appareils qui n'ont pas de panne au cours des trois premières années.

La valeur la plus proche de la probabilité de l'évènement « $X = 4$ » est :

a. $0,5555$ **b.** $0,8022$ **c.** $0,1607$

25. Antilles juin 2003

Une entreprise A est spécialisée dans la fabrication en série d'un article ; un contrôle de qualité a montré que chaque article produit par l'entreprise A pouvait présenter deux types de défaut : un défaut de soudure avec une probabilité égale à 0,03 et un défaut sur un composant électronique avec une probabilité égale à 0,02. Le contrôle a montré aussi que les deux défauts étaient indépendants. Un article est dit défectueux s'il présente au moins l'un des deux défauts.

1. Montrer que la probabilité qu'un article fabriqué par l'entreprise A soit défectueux est égale à 0,049 4.
2. Une grande surface reçoit 800 articles de l'entreprise A. Soit X la variable aléatoire qui à cet ensemble de 800 articles associe le nombre d'articles défectueux.

   a. Définir la loi de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X. Quel est le sens de ce nombre ?

3. a. Un petit commerçant passe une commande de 25 articles à l'entreprise A.
   Calculer, à 10^{-3} près, la probabilité qu'il y ait plus de 2 articles défectueux dans sa commande.

   b. Il veut que sur sa commande la probabilité d'avoir au moins un article défectueux reste inférieure à 50 %. Déterminer la valeur maximale du nombre n d'articles qu'il peut commander.

4. La variable aléatoire, qui à tout article fabriqué par l'entreprise associe sa durée de vie en jours, suit une loi exponentielle de paramètre 0,000 7, c'est-à-dire de densité de probabilité la fonction f définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par :

$$f(x) = 0,000\,7\mathrm{e}^{-0,000\,7x}.$$

   Calculer la probabilité, à 10^{-3} près, qu'un tel article ait une durée de vie comprise entre 700 et 1 000 jours.

26. Centres étrangers juin 2003

Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.

Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable alatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement.

On rappelle que la loi de probabilité est alors définie par :

$$p(D \leqslant A) = \int_0^A \frac{1}{82}\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\,\mathrm{d}x.$$

Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millime.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :
   - **a.** comprise entre 50 et 100 km ;
   - **b.** supérieure 300 km.
2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres ?
3. Détermination de la distance moyenne parcourue sans incident.
   - **a.** Au moyen d'une intégration par parties, calculer $\mathrm{I}(A) = \displaystyle\int_0^A \frac{1}{82}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{82}}\,\mathrm{d}x$ où A est un nombre réel positif.
   - **b.** Calculer la limite de $\mathrm{I}(A)$ lorsque A tend vers $+\infty$. (Cette limite représente la distance moyenne cherchée).
4. L'entreprise possède N_0 autocars. Les distances parcourues par chacun des autocars entre l'entrepôt et le lieu où survient un incident sont des variables aléatoires deux deux indépendantes et de même loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$.
   d tant un réel positif, on note X_d la variable aléatoire égale au nombre d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.
   - **a.** Montrer que X_d suit une loi binomiale de paramètres N_0 et $\mathrm{e}^{-\lambda d}$.
   - **b.** Donner le nombre moyen d'autocars n'ayant subi aucun incident après avoir parcouru d kilomètres.

27. La Réunion juin 2003

Cet exercice comporte 3 questions indépendantes.

Une question comporte 4 affirmations repérées par les lettres a, b, c et d.

Aucune justification n'est demandée pour cet exercice.

Vous devez indiquer pour chacune d'elles si elle est vraie ou fausse.

Vous inscrirez en toutes lettres « VRAI » ou « FAUX » dans la case correspondante du tableau donné en annexe à rendre avec la copie.

1. Une urne contient 75 boules blanches et 25 boules noires. L'expérience élémentaire consiste à tirer une boule. Les boules ont toutes la même probabilité d'être tirées. On effectue n tirages indépendants et avec remise, n désignant un entier supérieur à 10. Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches tirées.

   a. X suit une loi binomiale de paramètres n et $\dfrac{1}{4}$.

   b. $\text{P}(X = 0) = \dfrac{1}{2^{2n}}$

   c. $\text{P}(X < 5) = 1 - \text{P}(X > 5)$

   d. $\text{E}(X) = 0,75n$

2. Une maladie atteint 1 % d'une population donnée.
   Un test de dépistage de cette maladie a les caractéristiques suivantes :
   • Chez les individus malades, 99 % des tests sont positifs et 1 % sont négatifs.
   • Chez les individus non malades, 98 % des tests sont négatifs (les autres étant positifs).
   Un individu est choisi au hasard dans cette population et on lui applique le test.
   On note M l'évènement : **l'individu est malade** et T l'évènement : **le test pratiqué est positif**.

   a. $\text{P}_{\text{M}}(\text{T}) + \text{P}_{\overline{\text{M}}}(\text{T}) = 1,01.$

   b. $\text{P}_{\text{M}}(\text{T}) + \text{P}_{\overline{\text{M}}}(\text{T}) = \text{P}(\text{T})$

   c. $\text{P}(\text{T}) = 2,97.10^{-2}$

   d. Sachant que le test est positif, il y a deux chances sur trois pour que l'individu testé ne soit pas malade.

3. La durée d'attente en seconde de la caisse d'un supermarché est une variable aléatoire Y qui suit la loi exponentielle de paramètre 0,01. Alors :

   a. La densité de probabilité de Y est la fonction f définie sur $[0 ; +\infty[$ par : $f(t) = \text{e}^{-0,01t}$

   b. Pour tout réel t positif, $\text{P}(Y \leqslant t) = 1 - \text{e}^{-0,01t}$

c. La probabilité d'attendre moins de 3 minutes à cette caisse est, à 0,01 près, égale à 0,16.

d. Il y a plus d'une chance sur deux que l'attente à cette caisse soit supérieure à une minute.

28. Liban juin 2003

Une urne contient quatre boules noires et deux boules blanches.

Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 2. On répète n fois l'épreuve qui consiste à tirer une boule puis la remettre dans l'urne ; on suppose que toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées et que les tirages sont indépendants.

On note p_n, la probabilité de tirer exactement une boule blanche lors des $n-1$ premiers tirages et une boule blanche lors du n-ième tirage.

1. Calculer les probabilités $p_2,\ p_3$ et p_4.

2. On considère les évènements suivants :

B_n : « On tire une boule blanche lors du n-ième tirage »,

U_n : « On tire une boule blanche et une seule lors des $n-1$ premiers tirages ».

a. Calculer la probabilité de l'évènement B_n.

b. Exprimer la probabilit de l'évènement U_n en fonction de n.

c. En déduire l'expression de p_n en fonction de n et vérifier l'égalité :

$$p_n = \frac{n-1}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

3. On pose : $S_n = p_2 + p_3 + \cdots + p_n$.

a. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 2, on a :

$$S_n = 1 - \left(\frac{n}{2}+1\right) \times \left(\frac{2}{3}\right)^n .$$

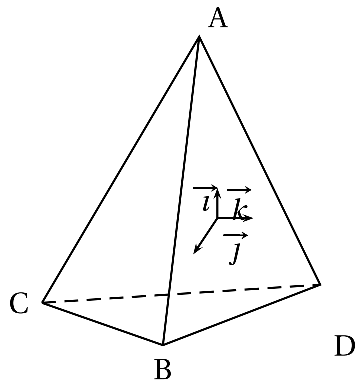
b. Déterminer la limite de la suite (S_n).

29. Polynésie juin 2003

Partie A

Dans l'espace muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$, on considère les points A, B, C et D de coordonnées respectives :
$\text{A}(0\,;0\,;3)$, $\text{B}(2\sqrt{2}\,;\,0\,;\,-1)$, $\text{C}(-\sqrt{2}\,;-\sqrt{6}\,;-1)$, $\text{D}(-\sqrt{2}\,;\,\sqrt{6}\,;-1)$.

1. Démontrer que ABCD est un tétraèdre régulier, c'est-à-dire un tétraèdre dont toutes les arêtes sont de même longueur.
2. On note R, S, T et U les milieux respectifs des arêtes [AC], [AD], [BD] et [BC] ; démontrer que RSTU est un parallélogramme de centre O.
3. Ce parallélogramme a-t-il des propriétés supplémentaires ? Expliquer.



Partie B

On dispose de trois tétraèdres identiques au précédent, parfaitement équilibrés. Chacun d'eux a une face peinte en bleu, une face peinte en jaune et deux faces peintes en rouge.

On lance les trois tétraèdres simultanément (on remarquera que, lorsqu'on lance un tel tétraèdre, une seule face est cachée et trois faces sont visibles).

1. Calculer la probabilité pour qu'au moins trois faces rouges soient visibles sur les trois tétraèdres.
2. Calculer la probabilité pour que la couleur bleue ne soit visible sur aucun tétraèdre.
3. Calculer la probabilité de l'évènement E « les six faces rouges sont visibles ».
4. On répète n fois l'expérience qui consiste à lancer les trois tétraèdres.

   Calculer la probabilité p_n pour que l'évènement E soit réalisé au moins une fois.

   Calculer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} p_n$.

30. Nouvelle–Calédonie mars 2003

Une société de maintenance de photocopieurs désire optimiser ses prestations au niveau des entreprises, afin de proposer un abonnement adapté à ses services.

On note, pour n entier naturel non nul, I_n l'évènement « La société intervient durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur » et $p_n = p(I_n)$ la probabilité de l'évènement I_n.

Le bureau d'étude a mis en évidence les résultats suivants pour une entreprise déterminée :

• $p(I_1) = p_1 = 0,75$.

• Sachant qu'i! y a eu une intervention durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale à $0,04$.

• Sachant qu'iI n'y a pas eu d'intervention durant le n-ième mois qui suit l'installation d'un photocopieur, la probabilité d'intervention le mois suivant est égale à $0,64$.

On rappelle que $\overline{\text{A}}$ est l'évènement contraire de l'évènement A et que $p_{\text{B}}(\text{A})$ est la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

PARTIE 1

1. Préciser $p_{I_n}(I_{n+1})$ et $p_{\overline{I_n}}(I_{n+1})$ puis calculer $p(I_{n+1} \cap I_n)$ et $p\left(I_{n+1} \cap \overline{I_n}\right)$ en fonction de $p_n \quad (n \in \mathbb{N}^*)$.
2. En déduire $p_{n+1} = -0,6p_n + 0,64$.
3. On considère la suite (q_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $q_n = p_n - 0,4$.

   a. Démontrer que (q_n) est une suite géométrique.

   b. En déduire q_n puis p_n en fonction de n.

   c. Donner une valeur approchée de p_6 à 10^{-3} près par excès.

31. Amérique du Sud décembre 2002

Une urne A contient une boule rouge et trois boules vertes. Une urne B contient deux boules rouges et deux boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher.

1. On dispose d'un dé à 6 faces, parfaitement équilibré, numéroté de 1 à 6. On le lance une fois ; si l'on obtient un multiple de 3, on tire au hasard une boule de l'urne A, sinon on tire au hasard une boule de l'urne B.

a. Calculer la probabilité d'obtenir une boule noire.

b. Quelle est la couleur qui a la plus grande probabilité de sortir ?

c. Quelle est la probabilité que la boule tirée provienne de l'urne B sachant qu'elle est rouge ?

2. On réunit toutes les boules dans une seule urne et on tire successivement trois boules que l'on pose chaque fois devant l'urne.

a. Montrer que la probabilité de l'évènement « la 3^{e} boule tirée est noire » vaut $\frac{1}{4}$.

b. Certains pensent que l'évènement « la première boule tirée est noire » a une probabilité supérieure à l'évènement « la troisième boule tirée est noire ». Est-ce vrai ? Justifier.

32. Nouvelle–Calédonie novembre 2002

Un jeu consiste à tirer simultanément trois boules d'une urne contenant six boules blanches et quatre boules rouges.

On suppose que tous les tirages sont équiprobables.

Si les trois boules tirées sont rouges, le joueur gagne 100 € ; si exactement deux boules tirées sont rouges, il gagne 15 € et si une seule est rouge il gagne 4 €. Dans tous les autre cas, il ne gagne rien.

Soit X la variable alatoire qui prend pour valeurs le gain en euros du joueur lors d'un jeu.

1. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

2. Pour un jeu, la mise est de 10 €. Le jeu est-il favorable au joueur, c'est-à-dire l'espérance mathématiques est-elle strictement supérieure à 10 ?

3. Pour l'organisateur, le jeu ne s'avérant pas suffisamment rentable, celui-ci envisage deux solutions :

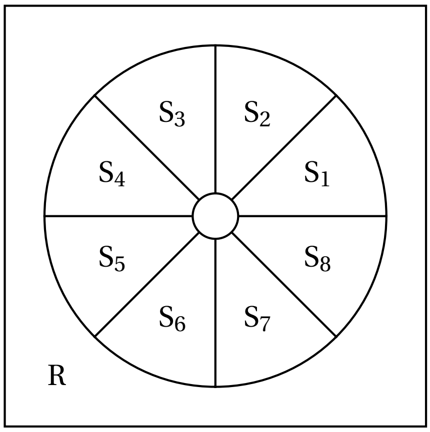
- soit augmenter la mise de 1 €, donc passer à 11 €,

- soit diminuer chaque gain de 1 €, c'est-à-dire ne gagner que 99 €, 14 € ou 3 €.

Quelle est la solution la plus rentable pour l'organisateur ?

33. France septembre 2002

Un carré de côté 20 cm est partagé selon les 10 zones suivantes :
- un disque D de rayon 1 cm,
- 8 secteurs S_1, S_2, …, S_8 de même aire délimités par les frontières du disque D et du disque D′ de même centre et de rayon 9 cm,
- une zone R entre le disque D′ et le bord du carré.



On place un point aléatoirement dans le carré. La probabilité de placer le point dans une zone quelconque du carré est proportionnelle à l'aire de cette zone.

1. **a.** Déterminer la probabilité $p(\mathrm{D})$ pour que le point soit placé dans le disque D.

   b. Déterminer la probabilité $p(\mathrm{S}_1)$ pour que le point soit placé dans le secteur S_1.

2. Pour cette question **2.**, on utilisera les valeurs approchées suivantes : $p(\mathrm{D}) = 0{,}008$ et pour tout k appartenant à $\{1\,;\,2;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\}$, $p(\mathrm{S}_k) = 0{,}078\,5$.

   À cette situation aléatoire est associé le jeu suivant :

   - un point placé dans le disque D fait gagner 10 euros ;

   - un point placé dans le secteur S_k fait gagner k euros pour tout k appartenant à $\{1\,;\,2;\,3\,;\,4\,;\,5\,;\,6\,;\,7\,;\,8\}$;

   - un point placé dans la zone R fait perdre 4 euros.

   On note X la variable alatoire égale au gain algébrique obtenu.

   a. Calculer la probabilité $p(\mathrm{R})$ pour que le point soit placé dans la zone R.

   Calculer l'espérance de X.

   b. On joue deux fois de suite. On a donc placé deux points de manière indépendante dans le carré. Calculer la probabilité d'obtenir un gain total positif ou nul.

   c. Soit n un entier naturel supérieur ou égal à deux. On joue n fois de suite. On a donc placé n points de manière indépendante dans le carré.

   Calculer la probabilité p_n d'obtenir au moins un point placé dans le disque D.

   Déterminer la plus petite valeur de n tel que $p_n \geqslant 0{,}9$.

34. Amérique du Nord juin 2002

Cet exercice comporte deux parties qui peuvent être traitées de manière indépendante.

Partie I

1. Dans un questionnaire à choix multiple (Q.C.M.), pour une question donnée, 3 réponses sont proposées dont une seule est exacte.
   Un candidat décide de répondre au hasard à cette question.
   La réponse exacte rapporte n point(s) et une réponse fausse fait perdre p point(s).
   Soit N la variable aléatoire qui associe, à la réponse donnée par le candidat, la note algébrique qui lui sera attribuée pour cette question.
   a. Donner la loi de probabilité de N.
   b. Quelle relation doit exister entre n et p pour que l'espérance mathématique de N soit nulle ?
2. À un concours un candidat doit répondre à un Q.C.M. de 4 questions comportant chacune trois propositions de réponse dont une seule est exacte. On suppose qu'il répond à chaque question, au hasard. Calculer la probabilité qu'il réponde correctement à 3 questions exactement (donner cette probabilité sous forme de fraction irréductible puis sa valeur arrondie au centième).

Partie II

Répondre au Q.C.M. proposé sur la feuille annexe (à rendre avec la copie).

Document à rendre avec la copie

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Il est seulement demandé d'entourer la réponse choisie pour chacune des quatre questions.

L'absence de réponse à une question ne sera pas pénalisée.

a. On dispose de dix jetons numérotés de 1 à 10 et on en extrait simultanément trois pour former un « paquet ». Combien de « paquets » contenant au moins un jeton ayant un numéro pair peut-on ainsi former ?

Réponse 1 : 180	Réponse 2 : 330	Réponse 3 : 110

b. A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé tels que :

$$p(\text{A}) = 0,4 \quad p(\text{B}) = 0,5 \quad p(\overline{\text{A} \cup \text{B}}) = 0,35.$$

Combien vaut $p(\text{A} \cap \text{B})$?

Réponse 1 : $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,1$	Réponse 2 : $p(\text{A} \cap \text{B}) = 0,25$	Réponse 3 : Les données sont insuffisantes pour répondre.

c. A et B sont deux évènements d'un espace probabilisé tels que $p(B \cap A) = \frac{1}{6}$, $p_A(B) = 0,25$ (probabilité conditionnelle de B sachant que A est réalisé). Combien vaut $p(A)$?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
$p(A) = \frac{2}{3}$	$p(A) = \frac{1}{24}$	$p(A) = \frac{1}{12}$

d. Une variable aléatoire X a pour loi de probabilité :

x_i	1	2	4
p_i	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Combien vaut l'écart type de X ?

Réponse 1 :	Réponse 2 :	Réponse 3 :
$\sigma = \frac{3}{2}$	$\sigma = \sqrt{\frac{3}{2}}$	$\sigma = 2$

35. Antilles juin 2002

Pour entretenir en bon état de fonctionnement le chauffage, une société immobilière fait contrôler les chaudières de son parc de logements pendant l'été. On sait que 20 % des chaudières sont sous garantie.
Parmi les chaudières sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\dfrac{1}{100}$.
Parmi les chaudières qui ne sont plus sous garantie, la probabilité qu'une chaudière soit défectueuse est de $\dfrac{1}{10}$.
On appelle G l'évènement suivant : « la chaudière est sous garantie ».

1. Calculer la probabilité des évènement suivants :
A : « la chaudière est garantie et est défectueuse » ;
B : « la chaudière est défectueuse ».

2. Dans un logement la chaudière est défectueuse. Montrer que la probabilité qu'elle soit sous garantie est de $\dfrac{1}{41}$.

3. Le contrôle est gratuit si la chaudière est sous garantie. Il coûte 80 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et n'est pas défectueuse. Il coûte 280 euros si la chaudière n'est plus sous garantie et est défectueuse. On note X la variable aléatoire qui représente le coût du contrôle d'une chaudière. Déterminer la loi de probabilité de X et son espérance mathématique.

4. Au cours de la période de contrôle, on a trouvé 5 chaudières défectueuses. Quelle est la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles soit sous garantie ?

36. Asie juin 2002

Amélie est en vacances dans une très grande métropole. Elle doit traverser cette ville en suivant l'avenue principale, qui est jalonnée de nombreux feux tricolores.

Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on note E_n l'évènement « Amélie est arrêtée par le n-ième feu rouge ou orange » et $\overline{\mathrm{E}}_n$, l'évènement contraire. Le feu orange est considéré comme un feu rouge.

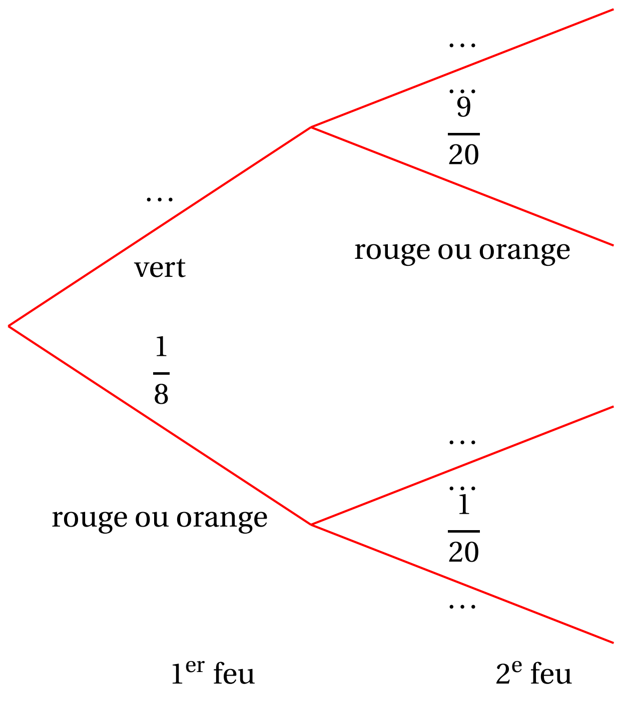
Soit p_n la probabilité de E_n et q_n celle de $\overline{\mathrm{E}}_n$. La probabilité que le premier feu tricolore soit rouge ou orange vaut $\frac{1}{8}$.

On suppose que les deux conditions suivantes sont réalisées :

- la probabilité que le $n+1$-ième feu tricolore soit rouge ou orange, si le n-ième feu est rouge ou orange, vaut $\frac{1}{20}$.
- la probabilité que le $n+1$-ième feu tricolore soit rouge ou orange, si le n-ième feu est vert, est égale à $\frac{9}{20}$.

1. On s'intéresse, tout d'abord, aux deux premiers feux tricolores.

a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci-dessous.



b. On note X la variable aléatoire égale au nombre de feux verts parmi ces deux feux tricolores. Déterminer la loi de probabilité de X.

c. Calculer l'espérance mathématique de X.

2. On se place maintenant dans le cas général.

a. Donner les probabilités conditionnelles $p_{\mathrm{E}_n}\left(\mathrm{E}_{n+1}\right)$ et $p_{\overline{\mathrm{E}_n}}\left(\mathrm{E}_{n+1}\right)$.

b. En remarquant que $\mathrm{E}_{n+1} = \left(\mathrm{E}_{n+1} \cap \mathrm{E}_n\right) \cup \left(\mathrm{E}_{n+1} \cap \overline{\mathrm{E}_n}\right)$, montrer que, pour tout $n \geqslant 1$,

$$p_{n+1} = \frac{1}{20}p_n + \frac{9}{20}q_n.$$

c. En déduire l'expression de p_{n+1} en fonction de p_n.

3. Soit la suite (u_n) de nombres réels définie pour tout entier naturel $n \geqslant 1$ par $u_n = 28p_n - 9$.

a. Montrer que (u_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison k.

b. Exprimer u_n, puis p_n en fonction de n.

c. Déterminer la limite, si elle existe, de p_n, quand n tend vers $+\infty$. Donner une interprétation de ce résultat.

37. France juin 2002

1. Une urne contient quatre jetons numérotés de 1 à 4.

On tire au hasard un jeton de l'urne, on lit le numéro, noté a, porté sur le jeton puis on remet le jeton tiré dans l'urne. On tire ensuite un deuxième jeton de l'urne et on note b le numéro du jeton tiré.

Soit $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$ un repère orthonormal de l'espace. On considère les vecteurs $\overrightarrow{U}$ et $\overrightarrow{V}$ de coordonnées respectives $(a,\ -5,\ 1-a)$ et $(1+b,\ 1,\ b)$.

Montrer que la probabilité que ces vecteurs soient orthogonaux est égale à $\dfrac{1}{4}$.

2. Deux personnes A et B jouent au jeu suivant, constitué d'un certain nombre de parties identiques décrites ci-après : au cours d'une partie, chaque joueur effectue le tirage de deux jetons décrit dans la première question.

Si A obtient des vecteurs orthogonaux et B des vecteurs non orthogonaux, A est déclaré vainqueur, le jeu s'arrête.

Si A obtient des vecteurs non orthogonaux et B des vecteurs orthogonaux, B est déclaré vainqueur et le jeu s'arrête.

Dans les autres cas, les joueurs entreprennent une nouvelle partie ; le jeu continue.

Pour tout entier n, on désigne par :

A_n l'évènement : « A gagne la n-ième partie »,

B_n l'évènement : « B gagne la n-ième partie »,

C_n l'évènement : « le jeu continue après la n-ième partie »

a. Calculer les probabilités $p(\text{A}_1)$, $p(\text{B}_1)$ et $p(\text{C}_1)$.

b. Exprimer $p(\text{C}_{n+1})$ en fonction de $p(\text{C}_n)$ et montrer que $p(\text{C}_n) = \left(\dfrac{5}{8}\right)^n$.

Exprimer $p(\text{A}_{n+1})$ en fonction de $p(\text{C}_n$ et en déduire que $p(\text{A}_n) = \dfrac{3}{16}\left(\dfrac{5}{8}\right)^{n-1}$.

3. **a.** Déterminer la limite de $p(\text{A}_n)$ quand n tend vers $+\infty$.

b. Déterminer le plus petit entier n tel que $p(\text{A}_n)$ soit inférieur ou égal à 0,01.

38. La Réunion juin 2002

Dans un lot de 100 pièces de monnaie toutes de même apparence, ont été mélangées 60 pièces équilibrées et 40 pièces truquées.

La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce truquée est $\frac{3}{4}$.

La probabilité d'apparition de « PILE » lors d'un jet d'une pièce équilibrée est $\frac{1}{2}$.

On suppose que les différents lancers dont il sera question dans la suite sont indépendants les uns des autres.

La probabilité d'un évènement A est notée $p(\text{A})$. On désigne par $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de A.

La probabilité conditionnelle de A sachant que l'évènement B est réalisé est notée $p(\text{A}/\text{B})$.

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On prend une pièce au hasard et on la lance :
   soit T l'évènement : « la pièce est truquée »,
   soit P l'évènement : « on obtient PILE » .

   a. Calculer la probabilité d'obtenir « Pile » (on pourra s'aider d'un arbre).

   b. Quelle est la probabilité que la pièce soit truquée sachant que l'on a obtenu « PILE » ?

2. On prend une pièce au hasard et on la lance quatre fois.
   si au cours des quatre lancers on obtient quatre fois « Pile », on décide d'éliminer la pièce,
   dans le cas contraire, on décide de conserver la pièce.
   On note E l'évènement « la pièce est éliminée ».

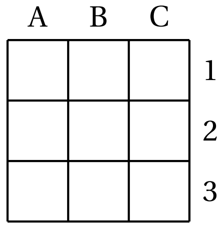
   a. Quelle est la probabilité que la pièce soit éliminée sachant qu'elle est équilibrée ?

   b. Quelle est la probabilité que la pièce soit conservée sachant qu'elle est truquée ?

   c. Quelle est la probabilité d'avoir pris une pièce équilibrée et de l'avoir éliminée ou d'avoir pris une pièce truquée et de l'avoir conservée ?

39. Polynésie juin 2002

On dispose d'une grille à trois lignes et trois colonnes. Une machine M_1 place au hasard un jeton dans une case de la grille, puis une machine M_2 place de même un jeton sur la grille dans une case libre et enfin une troisième machine M_3 place un jeton dans une case libre.

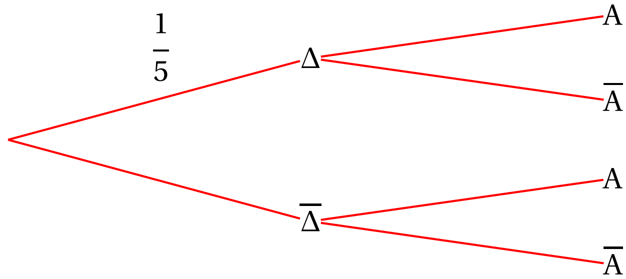


On note les évènements suivants :
- H : « Les trois jetons sont alignés horizontalement » ;
- V : « Les trois jetons sont alignés verticalement » ;
- D : « Les trois jetons sont alignés en diagonale » ;
- N : « Les trois jetons ne sont pas alignés ».

Les nombres demandés seront donnés sous forme de fraction irréductible.

1. Calculer les probabilités des trois évènements H, V et D.
   En déduire que la probabilité de N est égale à $\frac{19}{21}$.
2. On considère la variable aléatoire X définie par :
   - $X = 20$, lorsque H ou V est réalisé ;
   - $X = \alpha$, lorsque D est réalisé ;
   - $X = -2$, lorsque N est réalisé.

   Déterminer α pour que l'espérance de X soit nulle.
3. Dans cette question, on se place dans le cas où la machine M_1 est déréglée ; elle place alors le premier jeton dans l'un des coins de la grille.
   On note Δ l'évènement : « la machine M_1 est déréglée ».
   a. Calculer la probabilité d'avoir un alignement horizontal c'est-à-dire $p_\Delta(\text{H})$, puis de même, d'avoir un alignement vertical $p_\Delta(\text{V})$, d'avoir un alignement en diagonale $p_\Delta(\text{D})$.
   b. En déduire que la probabilité d'avoir un alignement horizontal ou vertical ou diagonal, est égale à $\frac{3}{28}$.
4. A désigne l'évènement « les trois jetons sont alignés horizontalement ou verticalement ou en diagonale ». On admet que $p(\Delta) = \frac{1}{5}$.
   Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant en précisant les cinq probabilités correspondantes :



40. Pondichéry juin 2002

Partie A

Une urne contient n boules blanches ($n \in \mathbb{N}$ et $n \geqslant 2$), 5 boules rouges et 3 boules vertes.

On tire simultanément et au hasard deux boules de l'urne .

1. Quelle est la probabilité de tirer deux boules blanches ?
2. On note $p(n)$ la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

   a. Montrer que $p(n) = \dfrac{n^2 - n + 26}{(n+8)(n+7)}$

   b. Calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} p(n)$. Interpréter ce résultat.

Partie B

Pour les questions suivantes $n = 4$.

1. Calculer $p(4)$.
2. Un tirage consiste à tirer simultanément et au hasard deux boules de l'urne.

   Un joueur effectue deux tirages indépendants, en remettant dans l'urne avant le second tirage les deux boules tirées la première fois.
   Il mise au départ la somme de 30 euros.

   Pour chaque tirage :

   - si les deux boules sont de même couleur, il reçoit alors 40 euros,

   - si elles sont de couleurs différentes, il reçoit alors 5 euros.

   On appelle gain du joueur la différence, à l'issue des deux tirages, entre la somme reçue par le joueur et sa mise initiale (ce gain peut être positif ou négatif).

   On désigne par X la variable aléatoire égale au gain du joueur.

   a. Quelles sont les valeurs prises par X ?

   b. Déterminer la loi de probabilité de X.

   c. Calculer l'espérance de X.

41. Amérique du Sud décembre 2001

On considère l'ensemble E = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}.

Avec deux chiffres disfincts x et y de E on crée un unique domino simple noté indifféremment $\boxed{x \mid y}$ ou $\boxed{y \mid x}$.

Avec un chiffre z de E, on forme un unique domino double noté $\boxed{z \mid z}$.

1. Montrer que l'on peut ainsi créer 36 dominos.

2. On tire au hasard un domino.

a. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino constitué de chiffres pairs ?

b. Quelle est la probabilité d'obtenir un domino dont la somme des chiffres est paire ?

3. On tire au hasard et simultanément deux dominos.

Un élève affirme : « la probabilité d'obtenir un domino double et un domino simple dont l'un des chiffres est celui du domino double est égale à $\dfrac{4}{45}$ ».

Son affirmation est-elle vraie ou fausse ? (*La réponse sera justifiée*).

42. Antilles septembre 2001

Soit m un nombre réel et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\left\{\begin{array}{lcll} f(x) & = & m\sin x & \text{pour } x \in [0\,;\,\pi] \\ f(x) & = & 0 & \text{sinon.} \end{array}\right.$$

1. Déterminer le réel m tel que f soit une densité de probabilité.

2. Représenter f dans un repère orthonormé.

3. Soit X une variable aléatoire dont f est une densité de probabilité.
Définir la fonction de répartition de X puis représenter graphiquement F dans un repère orthonormé.

4. Calculer la probabilité $p\left(\dfrac{\pi}{4} \leqslant X \leqslant \dfrac{3\pi}{4}\right)$.

5. Calculer les probabilités $p(X \geqslant 0)$ et $p(X \leqslant 0)$.

43. Antilles juin 2001

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Un joueur achète 10 euros un billet permettant de participer à un jeu constitué d'un grattage suivi d'une loterie.

Il gratte une case sur le billet. Il peut alors gagner 100 euros avec une probabilité de $\frac{1}{50}$ ou bien ne rien gagner.

G désigne l'évènement : « Le joueur gagne au grattage ».

Il participe ensuite à une loterie avec le même billet. À cette loterie, il peut gagner 100 euros, ou 200 euros, ou bien ne rien gagner.

L_i désigne l'évènement « Le joueur gagne 100 euros à la loterie ».

L_2 désigne l'évènement « Le joueur gagne 200 euros à la loterie ».

P désigne l'événement : « Le joueur ne gagne rien à la loterie ».

Si le joueur n'a rien gagné au grattage, la probabilité qu'il gagne 100 euros à la loterie est $\frac{1}{70}$, et la probabilité qu'il gagne 200 euros à la loterie est $\frac{1}{490}$.

1. **a.** Faire un arbre sur lequel on indiquera les renseignements qui précèdent.

   b. Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il n'a rien gagné au grattage. Compléter l'arbre obtenu avec cette valeur.

   c. Au bout de chaque branche, indiquer le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

2. On note X la variable aléatoire qui représente le gain algébrique total du joueur, après grattage et loterie, déduction faite du prix du billet.

   La probabilité de l'évènement « X = 90 » est $\frac{2}{125}$.

   La probabilité de l'évènement « X = 190 » est $\frac{1}{250}$.

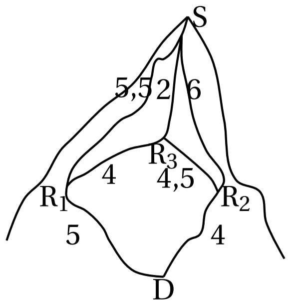
   a. Montrer que la probabilité que le joueur gagne 100 euros à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage, est égale à $\frac{1}{10}$.

   b. Calculer la probabilité que le joueur ne gagne rien à la loterie, sachant qu'il a gagné 100 euros au grattage.

   c. Déterminer la loi de probabilité de X.
   Calculer l'espérance de X.

44. Asie juin 2001

Pour rejoindre le sommet S d'une montagne des Alpes à partir d'un point de départ D, les randonneurs ont la possibilité d'emprunter plusieurs parcours. La course n'étant pas faisable en une journée, ils doivent passer une nuit dans l'un des deux refuges se trouvant à la même altitude de 1400 mètres sur les parcours existants ; les deux refuges ne sont pas situés au même endroit. On les appelle R_1 et R_2.
Le lendemain matin, pour atteindre le sommet qui se trouve à 2500 mètres d'altitude, ils ont deux possibilités : ils peuvent atteindre le sommet en faisant une halte au refuge R_3, ou atteindre le sommet directement.
La probabilité que les randonneurs choisissent de passer par R_1 est égale à $\frac{1}{3}$.
La probabilité de monter directement au sommet en partant de R_1 est égale à $\frac{3}{4}$.
La probabilité de monter directement au sommet en partant de R_2 est égale à $\frac{2}{3}$.



1. Tracer un arbre pondéré représentant tous les trajets possibles du départ D jusqu'au sommet S.
2. Déterminer la probabilité de chacun des évènements suivants :
E_1 : « Les randonneurs ont fait une halte au refuge R_3 sachant qu'ils ont passé la nuit au refuge R_1 » ;
E_2 « Les randonneurs ont fait une halte au refuge R_3 » ;
E_3 « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge R_1 sachant qu'ils ont fait une halte au refuge R_3 » ;
E_4 « Les randonneurs ont passé la nuit au refuge R_2 sachant que, le deuxième jour, ils sont montés directement au sommet S ».
3. On note $d(M,\ N)$ la distance, en km, à parcourir pour se rendre du point M au point N.
On donne $d(\text{D}, \text{R}_1) = 5$; $d(\text{D}, \text{R}_2) = 4$; $d(\text{R}_1,\ \text{R}_3) = 4$; $d(\text{R}_2,\ \text{R}_3) = 4{,}5$; $d(\text{R}_3, \text{S}) = 2$; $d(\text{R}_1,\ \text{S}) = 5{,}5$; $d(\text{R}_2,\ \text{S}) = 6$.
Soit X la variable aléatoire qui représente la distance parcourue par les randonneurs pour aller du départ D au sommet S.

   a. Déterminer la loi de probabilité de X.

   b. Calculer l'espérance mathématique de X.

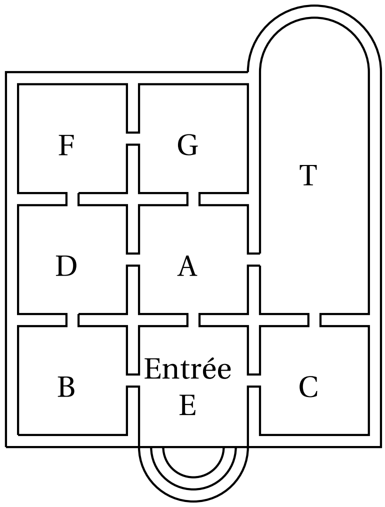
45. Centres étrangers juin 2001

Le directeur d'un musée, dont le plan est fourni ci-dessous, organise une exposition.
Afin de prévoir la fréquentation des salles, il décide d'imaginer le parcours d'un visiteur, pris au hasard, en faisant les hypothèses suivantes :

- Le visiteur passe *au hasard* d'une salle à une salle voisine.
- Pour sortir d'une salle, il franchit de manière équiprobable n'importe quelle autre porte que celle qu'il a utilisée pour entrer.

Dans le parcours du visiteur, le directeur ne s'intéresse qu'aux quatre premières salles traversées, l'entrée E étant comprise dans celles-ci. Un trajet par ces quatre premières salles est codé par un mot de quatre lettres, commençant par la lettre E. Par exemple :

- Si le visiteur passe successivement par les salles E, B, D, F, on codera son trajet par le mot EBDF.
- Le trajet codé EBDB est impossible avec les hypothèses choisies.



1. On considère un visiteur, pris au hasard, devant effectuer un trajet selon les hypothèses précédentes.
   - **a.** Construire l'arbre pondéré des différents trajets possibles pour ce visiteur.
   - **b.** Montrer que la probabilité du parcours codé EBDF est $\frac{1}{6}$.
   - **c.** Déterminer la probabilité p_1 de l'évènement : « La quatrième salle du trajet est F ».
   - **d.** Pour des raisons techniques, le directeur installe les œuvres les plus intéressantes dans la salle T. Déterminer la probabilité p_2 de l'évènement « Le trajet passe par la salle T ».
2. Le directeur imagine dix visiteurs pris au hasard, effectuant chacun un trajet, de manière indépendante et selon les hypothèses précédentes. On appelle X la variable aléatoire qui, aux dix visiteurs, associe le nombre de leurs trajets passant par la salle T.

a. Calculer la probabilité de l'évènement $(X = 1)$.

b. Calculer la probabilité que deux visiteurs au moins passent par la salle T. (Donner le résultat arrondi au millième.)

c. Le directeur décide d'obliger les visiteurs à se diriger, après l'entrée, vers la salle A, les hypothèses précédentes demeurant pour la suite des trajets. Il pense ainsi augmenter la probabilité que deux visiteurs au moins, sur les dix, passent par la salle T.
Prouver qu'il a tort.

46. France juin 2001

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm].

On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \dfrac{5\pi}{6}$. Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $\left(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M_n}\right)$ ait pour mesure α_n.

1. Placer les douze points $\mathrm{M}_0,\ \mathrm{M}_1,\ \mathrm{M}_2, \cdots, \mathrm{M}_{11}$.

2. On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{5n\pi}{12}\right)}$.

3. **a.** Montrer, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :

- les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés ;
- les points M_n et M_{n+12} sont confondus.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_{n+4} = \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} z_n$.
En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$, est équilatéral.
On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_nM_{n+4}M_{n+8}$.

4. Douze cartons indiscernables au toucher, marqués $\mathrm{M}_0,\ \mathrm{M}_1,\ \mathrm{M}_2, \cdots, \mathrm{M}_{11}$ sont disposés dans une urne. On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

47. Liban juin 2001

Dans un village de montagne deux familles A et B disposent de cinq circuits balisés de promenades $c_1,\ c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_4,\ c_5$.

Partie A

Chaque matin, chacune des familles tire au hasard, indépendamment l'une de l'autre, un des cinq circuits.

1. Combien y-a-t-il de tirages possibles pour l'ensemble des deux familles ?
2. Quelle est la probabilité pour qu'elles fassent le même jour, le même circuit ?
3. Quelle est la probabilité pour que pendant n jours consécutifs, elles ne se trouvent janais sur le même circuit ?
4. Déterminer la plus petite valeur de n pour laquelle la probabilité de se trouver au moins une fois sur le même circuit est supérieure ou égale à 0,9.

Partie B

On considère dans cette partie deux jours consécutifs. Le deuxième jour chaque famille élimine de son tirage le circuit qu'elle a fait la veille. Il reste donc quatre circuits pour ciacune des deux familles.
On note :
E l'évènement « les deux familles font le même circuit le premier jour ».
F l'évènement « les deux familles font le même circuit le deuxième jour ».
Calculer les probabilités suivantes :

$$\mathrm{P(E)}\ ,\ \mathrm{P(F/E)}\ ,\ \mathrm{P}(\mathrm{F}/\overline{\mathrm{E}}) \text{ puis } \mathrm{P(F \cap E)} \text{ et } \mathrm{P}(\mathrm{F} \cap \overline{\mathrm{E}}).$$

En déduire P(F).

48. Polynésie juin 2001

Une boîte contient 8 cubes : $\left\{\begin{array}{c}\text{1 gros rouge et 3 petits rouges}\\ \text{2 gros verts et 1 petit vert}\\ \text{1 petit jaune}\end{array}\right.$

Un enfant choisit au hasard et simultanément 3 cubes de la boîte (*on admettra que la probabilité de tirer un cube donné est indépendante de sa taille et de sa couleur*).

Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

1. On note A l'évènement : « obtenir des cubes de couleurs différentes » et B l'évènement : « obtenir au plus un petit cube ».

a. Calculer la probabilité de A.

b. Vérifier que la probabilité de B est égale à $\frac{2}{7}$.

2. Soit X la variable aléatoire donnant le nombre de petits cubes rouges tirés par l'enfant.

a. Déterminer la loi de probabilité de X.

b. Calculer l'espérance mathématique de X.

3. L'enfant répète n fois l'épreuve « tirer simultanément trois cubes de la boîte », en remettant dans la boîte les cubes tirés avant de procéder au tirage suivant. Les tirages sont indépendants. On note P_n la probabilité que l'évènement B soit réalisé au moins une fois.

a. Déterminer P_n en fonction de n.

b. Déterminer le plus petit entier n tel que $P_n \geqslant 0,99$.

49. Amérique du Sud novembre 2000

Un sac contient trois boules numérotées respectivement 0, 1 et 2, indiscernables au toucher.
On tire une boule du sac, on note son numéro x et on la remet dans le sac, puis on tire une seconde boule, on note son numéro y et on la remet dans le sac.
Toutes les boules ont la même probabilité d'être tirées.
À chaque tirage de **deux boules**, on associe dans le plan, muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, le point M de coordonnées $(x\,;\,y)$.
On désigne par D le disque de centre O et de rayon 1,7.
Les résultats seront donnés sous forme de **fraction irréductible**.

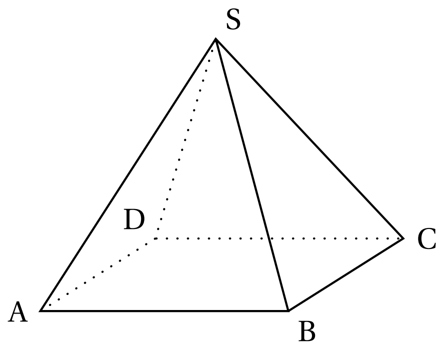
1. Placer dans le plan muni du repère $(\text{O}\,;\,\vec{\imath}, \vec{\jmath})$ les points correspondant aux différents résultats possibles.
2. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
   A « Le point M est sur l'axe des abscisses » ;
   B « Le point M appartient au cercle de centre O et de rayon 1 ».
3. **a.** Soit X la variable aléatoire qui, à chaque tirage de deux boules, associe la somme x^2+y^2. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X. Calculer son espérance mathématique $\text{E}(X)$.

   b. Montrer que la probabilité de l'évènement « le point M appartient au disque D » est égale à $\dfrac{4}{9}$.
4. On tire 5 fois de suite, de façon indépendante, deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi 5 points du plan.
   Quelle est la probabilité de l'évènement suivant :
   C : « Au moins un de ces points appartient au disque D » ?
5. On renouvelle n fois de suite, de façon indépendante, le tirage de deux boules successivement et avec remise. On obtient ainsi n points du plan.
   Déterminer le plus petit entier n strictement positif tel que la probabilité de l'évènement « au moins un de ces points appartient à D » soit supérieure ou égale à $0,999\,9$.

50. Antilles septembre 2000

1. Une fourmi se déplace sur les arêtes de la pyramide ABCDS. Depuis un sommet quelconque, elle se dirige au hasard (on suppose qu'il y a équiprobabilité) vers un sommet voisin ; on dit qu'elle « fait un pas ».

a. La fourmi se trouve en A.
Après avoir fait deux pas, quelle est la probabilité qu'elle soit :
• en A ?
• en B ?
• en C ?
• en D ?



b. Pour tout nombre entier naturel n strictement positif, on note :
S_n l'évènement « la fourmi est au sommet S après n pas », et p_n la probabilité de cet évènement.

Donner p_1.
En remarquant que $S_{n+1} = S_{n+1} \cap \overline{S_n}$, montrer que

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}\left(1 - p_n\right).$$

2. On considère la suite (p_n), définie pour tout nombre entier n strictement positif par : $\left\{\begin{array}{lcl} p_1 & = & \frac{1}{3} \\ p_{n+1} & = & \frac{1}{3}\left(1-p_n\right) \end{array}\right.$.

a. Montrer par récurrence que, pout tout entier naturel n strictement positif, on a $p_n = \frac{1}{4}\left(1 - \left(-\frac{1}{3}\right)^n\right)$.

b. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

51. France septembre 2000

Les résultats seront donnés à 10^{-3} *près.*
Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.
Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est 0,2.

1. On note :
• A_1 l'évènement « la personne est absente lors du premier appel » ;
• R_1 l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ».
Quelle est la probabilité de R_1 ?

2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et, alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est 0,3. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore 0,2.
Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.
On note :
A_2 l'évènement « la personne est absente lors du second appel » ;
R_2 l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel » ;
R l'évènement « la personne accepte de répondre au questionnaire ».
Montrer que la probabilité de R est 0,176. (On pourra utiliser un arbre).

3. Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité pour que la réponse ait eu lieu lors du premier appel ?

4. On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Un enquêteur a une liste de 20 personnes à contacter. Quelle est la probabilité pour qu'une au moins des 20 personnes de la liste accepte de répondre au questionnaire ?

52. Polynésie septembre 2000

On dispose d'un dé cubique dont les faces sont numérotées de 1 à 6. On désigne par p_k la probabilité d'obtenir, lors d'un lancer, la face numérotée k (k est un entier et $1 \leqslant k \leqslant 6$).
Ce dé a été pipé de telle sorte que :
• les six faces ne sont pas équiprobables,
• les nombres $p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4,\ p_5,\ p_6$, dans cet ordre, sont six termes consécutifs d'une suite arithmétique de raison r,
• les nombres $p_1,\ p_2,\ p_4$ dans cet ordre, sont trois termes consécutifs d'une suite géométrique.

1. Démontrer que : $p_k = \dfrac{k}{21}$ pour tout entier k tel que $1 \leqslant k \leqslant 6$.
2. On lance ce dé une fois et on considère les évènements suivants :
   A : « le nombre obtenu est pair »
   B : « le nombre obtenu est supérieur ou égal à 3 »
   C : « le nombre obtenu est 3 ou 4 ».
   a. Calculer la probabilité de chacun de ces évènements.
   b. Calculer la probabilité que le nombre obtenu soit supérieur ou égal à 3, sachant qu'il est pair.
   c. Les évènements A et B sont-ils indépendants ? Les évènements A et C sont-ils indépendants ?
3. On utilise ce dé pour un jeu. On dispose :
   • d'une urne U_1 contenant une boule blanche et trois boules noires,
   • d'une urne U_2 contenant deux boules blanches et une boule noire.
   Le joueur lance le dé :
   • s'il obtient un nombre pair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_1,
   • s'il obtient un nombre impair, il extrait au hasard une boule de l'urne U_2.
   On suppose que les tirages sont équiprobables et le joueur est déclaré gagnant lorsqu'il tire une boule blanche, on note G cet évènement.
   a. Déterminer la probabilité de l'évènement $G \cap A$, puis la probabilité de l'évènement G.
   b. Le joueur est gagnant. Déterminer la probabilité qu'il ait obtenu un nombre pair lors du lancer du dé.

53. Antilles juin 2000

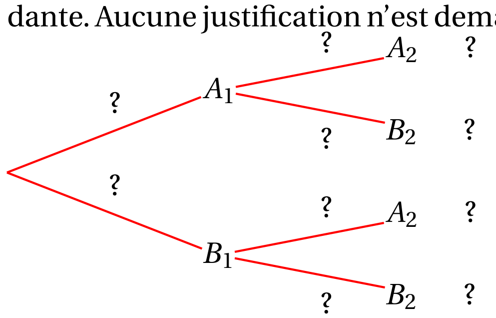
Un groupe de vingt-deux personnes décide d'aller au cinéma deux samedis de suite pour voir deux films A et B.
Le premier samedi, huit personnes vont voir le film A, et les autres vont voir le fim B.
Le deuxième samedi, quatre personnes décident de revoir le fim A, deux vont revoir le film B, et les autres vont voir le film qu'elles n'ont pas vu la semaine précédente.
Après la deuxième séance, on interroge au hasard une personne de ce groupe. On considère les évènements suivants :
A_1 « la personne interrogée a vu le film A le premier samedi » ;
A_2 « la personne interrogée a vu le film A le deuxième samedi » ;
B_1 « la personne interrogée a vu le film B le premier samedi » ;
B_2 « la personne interrogée a vu le film B le deuxième samedi ».

1. **a.** Calculer les probabilités suivantes : $p(A_1)$ et $p(A_2)$.

   b. Calculer les probabilités de chacun des évènements suivants :

$$p(A_2/A_1),\ p(A_2/B_1)\ et\ p(A_1 \cap A_2)$$

   c. Reproduire et compléter l'arbre pondéré suivant, en remplaçant chaque point d'interrogation par la probabilité correspondante. Aucune justification n'est demandée pour cette question.



   d. Retrouver à partir de l'arbre pondéré que $p(A_2) = \dfrac{8}{11}$.

2. Le prix du billet pour le film A est de 30 F et de 20 F pour le film B.
On appelle X la variable aléatoire égale au coût total, pour la personne interrogée, des deux séances de cinéma.

   a. Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire X.

   b. Déterminer l'espérance mathématique de la variable aléatoire X.

54. Asie juin 2000

Alice débute au jeu de fléchettes. Elle effectue des lancers successifs d'une fléchette. Lorsqu'elle atteint la cible à un lancer, la probabilité qu'elle atteigne la cible au lancer suivant est égale à $\frac{1}{3}$. Lorsqu'elle a manqué la cible à un lancer, la probabilité qu'elle manque la cible au lancer suivant est égale à $\frac{4}{5}$. On suppose qu'au premier lancer elle a autant de chances d'atteindre la cible que de la manquer.
Pour tout entier naturel n strictement positif, on considère les évènements suivants :
A_n : « Alice atteint la cible au n^{e} coup ».
B_n : « Alice rate la cible au n^{e} coup ».
On pose $P_n = p(A_n)$.
Pour les questions **1.** et **2.** on pourra éventuellement utiliser un arbre pondéré.

1. Déterminer p_1 et montrer que $p_2 = \frac{4}{15}$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \geqslant 2$,
$$p_n = \frac{2}{15}p_{n-1} + \frac{1}{15}.$$
3. Pour $n \geqslant 1$ on pose $u_n = p_n - \frac{3}{13}$.
Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique, dont on précisera le premier terme u_1 et la raison q.
4. Écrire u_n puis p_n en fonction de n.
5. Déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n$.

55. Centres étrangers juin 2000

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes et on donnera les réponses sous forme de fractions.
Une urne contient 6 boules bleues, 3 boules rouges, et 2 boules vertes, indiscernables au toucher.

1. On tire simultanément au hasard 3 boules de l'urne.

a. Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :
E_1 : « Les boules sont toutes de couleurs différentes. »
E_2 : « Les boules sont toutes de la même couleur. »

b. On appelle X la variable aléatoire qui, à tout tirage de trois boules associe le nombre de boules bleues tirées.
Établir la loi de probabilité de X.
Calculer l'espérance mathématique de X.

2. Soit k un entier supérieur ou égal à 2.
On procède cette fois de la façon suivante : on tire au hasard une boule de l'urne, on note sa couleur, puis on la replace dans l'urne avant de procéder au tirage suivant.
On effectue ainsi k tirages successifs.
Quelle est la valeur minimale de k pour que la probabilité de ne tirer que des boules bleues soit au moins mille fois plus grande que la probabilité de ne tirer que des boules rouges ?

56. France juin 2000

Les résultats numériques seront donnés sous forme de fractions.

Dans une classe de 30 élèves sont formés un club photo et un club théâtre. Le club photo est composé de 10 membres, le club théâtre de 6 membres. Il y a deux élèves qui sont membres des deux clubs à la fois.
On note $\overline{\text{A}}$ l'évènement contraire de l'évènement A et $p(\text{A} / \text{B})$ la probabilité conditionnelle de A sachant que B est réalisé.

1. On interroge un élève de la classe pris au hasard.
On appelle P l'évènement : « L'élève fait partie du club photo », et T l'événement : « L'élève fait partie du club théâtre ».
Montrer que les évènements P et T sont indépendants.

2. Lors d'une séance du club photo, les 10 membres sont tous présents. Un premier élève est tiré au sort. Il doit prendre la photo d'un autre membre du club qui sera lui aussi tiré au sort.

a. On appelle T_1 l'évènement : « Le premier élève appartient au club théâtre ». Calculer $p(\text{T}_1)$.

b. On appelle T_2 l'évènement « L'élève pris en photo appartient au club théâtre ». Calculer $p(\text{T}_2/\text{T}_1)$, puis $p\left(\text{T}_2/\overline{\text{T}_1}\right)$. En déduire $p\left(T_2 \cap \text{T}_1\right)$ et $p\left(\text{T}_2 \cap \overline{\text{T}_1}\right)$.
(On pourra éventuellement utiliser un arbre.)

c. Montrer que la probabilité que l'élève pris en photo appartienne au club théâtre est 0,2.

3. Toutes les semaines, on recommence de façon indépendante la séance de photographie avec tirage au sort du photographe et du photographié. Le même élève peut être photographié plusieurs semaines de suite.
Calculer la probabilité qu'au bout de 4 semaines, aucun membre du club théâtre n'ait été photographié.

57. Liban juin 2000

Une urne contient 10 boules indiscernables, 5 rouges, 3 jaunes, et 2 vertes. Dans les questions **1.** et **2.** on tire au hasard et simultanément 3 boules de cette urne. Les réponses seront données sous forme de fractions irréductibles.

1. Soit les évènements suivants :
A « Les trois boules sont rouges. »
B « Les trois boules sont de la même couleur. »
C « Les trois boules sont chacune d'une couleur différente. »

a. Calculer les probabilités $p(A)$, $p(B)$ et $p(C)$.

b. On appelle X la variable aléatoire qui à chaque tirage associe le nombre de couleurs obtenues.
Déterminer la loi de probabilité de X. Calculer $E(X)$.

2. Dans cette question, on remplace les 5 boules rouges par n boules rouges où n est un entier supérieur ou égal à 2. L'urne contient donc $n+5$ boules, c'est-à-dire, n rouges, 3 jaunes et 2 vertes. On tire au hasard et simultanément deux boules de cette urne. Soit les évènements suivants :
D « Tirer deux boules rouges. »
E « Tirer deux boules de la même couleur. »

a. Montrer que la probabilité de l'événement D est

$$p(D) = \frac{n(n-1)}{(n+5)(n+4)}.$$

b. Calculer la probabilité de l'évènement E, $p(E)$ en fonction de n. Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(E) \geqslant \frac{1}{2}$?

58. Polynésie juin 2000

Un sac contient 10 jetons indiscernables au toucher :
4 jetons blancs marqués 0 ;
3 jetons rouges marqués 7 ;
2 jetons blancs marqués 2 ;
1 jeton rouge marqué 5.

1. On tire simultanément 4 jetons du sac.
   Quel est le nombre de tirages possibles ?
2. On suppose que tous les tirages sont équiprobables, et on considère les évènements suivants :
   A : « Les quatre numéros sont identiques ».
   B : « Avec les jetons tirés, on peut former le nombre 2000 ».
   C : « Tous les jetons sont blancs ».
   D : « Tous les jetons sont de la même couleur ».
   E : « Au moins un jeton porte un numéro différent des autres ».

   a. Montrer que la probabilité de l'évènement B, est $\dfrac{4}{105}$.

   b. Calculer la probabilité des évènements $A,\ C,\ D,\ E$.

   c. On suppose que l'évènement C est réalisé, calculer alors la probabilité de l'évènement B.
   On établit la règle de jeu suivante :
   - Si le joueur peut former 5 000, il gagne 75 F.
   - Si le joueur peut former le nombre 7 000, il gagne 50 F.
   - Si le joueur peut former le nombre 2 000, il gagne 20 F.
   - Si le joueur peut former le nombre 0 000, il perd 25 F.
   Pour tous les autres tirages, il perd 5 F.
   G est la variable aléatoire égale au gain algébrique du joueur.
   Établir la loi de probabilité de G et calculer l'espérance mathématique de G.

59. Pondichéry juin 2000

Un professeur se trouve en possession de 5 clefs de salles. Il se tient devant une porte et il sait que, parmi ses 5 clefs, 2 n'ouvrent pas la porte parce qu'elles sont défectueuses mais les autres le peuvent. Il veut alors les tester toutes, une à une. Le choix des clefs est effectué au hasard et sans remise. On appelle clef numéro x la clef utilisée au x-ième essai.

1. On appelle D_1 l'évènement : « La clef numéro 1 n'ouvre pas la porte ». Calculer sa probabilité.
2. On appelle D_2 l'évènement : « La clef numéro 2 n'ouvre pas la porte ». Calculer la probabilité que l'évènement D_2 se réalise, sachant que l'évènement D_1 est réalisé.
   En déduire la probabilité de l'évènement $D_1 \cap D_2$.
   On pourra, pour la suite de l'exercice, s'aider d'un arbre pondéré.
3. Quelle est la probabilité de l'évènement : « Les clefs numéros 1 et 2 ouvrent la porte et la clef numéro 3 ne l'ouvre pas » ?
4. Pour $1 \leqslant i < j \leqslant 5$, on note $(i\ ;\ j)$ l'évènement : « Les clefs qui n'ouvrent pas la porte sont les clefs numéros i et j », et $P(i\ ;\ j)$ la probabilité de cet évènement.

   a. Calculer $P(2\ ;\ 4)$.

   b. Calculer $P(4\ ;\ 5)$.

60. Amérique du Sud novembre 1999

Un appareil électronique envoie à une imprimante un code qui est un nombre de quatre chiffres, chaque chiffre ne pouvant prendre que les valeurs 0 ou 1 (par exemple : 1011).

1. **a.** Combien l'appareil peut-il fabriquer de codes distincts ?

On supposera dans ce qui suit que tous ces codes ont la même probabilité d'être produits.

   b. Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de 1 figurant dans le code. Donner la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

2. Une imprimante a été choisie au hasard dans une série.
À la suite d'études antérieures, on a observé cinq cas possibles. Dans le cas E_0, l'imprimante n'écrit que des 0, quel que soit le code émis par l'appareil. Pour chaque élément n de l'ensemble $\{1, 2, 3\}$, dans le cas E_n l'imprimante écrit correctement les n premiers caractères du code et n'écrit ensuite que des 0.
Par exemple, lorsque E_2 survient, tous les codes commençant par 01 sont imprimés 0100. Dans le cas E_4, l'imprimante fonctionne correctement.
L'état de l'imprimante sera donc considéré comme le résultat d'une épreuve aléatoire ayant cinq issues possibles E_0, E_1, E_2, E_3, E_4. On admet que, pour chaque élément n de l'ensemble $\{0, 1, 2, 3\}$, $P(E_n) = 32 \times 10^{-3}$. Le code émis par l'appareil est indépendant de l'état de l'imprimante.

   a. Calculer la probabilité $P(E_4)$. Pour la suite, C désigne l'évènement : « le code imprimé est identique à celui émis par l'appareil ».

   b. On suppose que E_0 se produit. Quelle est la probabilité $P(C/E_0)$ que le code imprimé soit quand même celui que l'appareil a envoyé ?
   En déduire la probabilité $P(C \cap E_0)$.

   c. Déterminer de même $P(C/E_n)$ puis $P(C \cap E_n)$ pour tout élément n de l'ensemble $\{1, 2, 3, 4\}$. En déduire $P(C)$.

   d. Si le code imprimé est exactement celui émis par l'appareil, quelle est la probabilité que E_2 se soit produit ?

61. Antilles–Guyane septembre 1999

Dans tout l'exercice on considère 20 boules indiscernables au toucher (10 noires et 10 blanches) et deux urnes A et B dans chacune desquelles on placera 10 boules suivant un mode qui sera précisé dans chaque question.

1. On choisit dix boules au hasard et on les met dans l'urne A. On place les dix autres boules dans l'urne B.

   a. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes ne contiennent chacune que des boules de même couleur ?

   b. Quelle est la probabilité pour que les deux urnes contiennent chacune 5 boules blanches et 5 boules noires ?

2. Soit x un entier tel que $0 \leqslant x \leqslant 10$. On place maintenant x boules blanches et $10 - x$ boules noires dans l'urne A et les $10 - x$ boules blanches et x boules noires restantes dans l'urne B. On procède à l'expérience E :
On tire au hasard une boule de A et on la met dans B, puis on tire au hasard une boule de B et on la met dans A.
On désigne par M l'évènement « chacune des deux urnes a la même composition avant et après l'expérience ».

   a. Pour cette question **a.**, on prend $x = 6$.
   Quelle est la probabilité de l'évènement M ?

   b. Montrer que la probabilité de l'évènement M est égale à :

$$\frac{1}{55}\left(-x^2 + 10x + 5\right).$$

   c. Pour quelles valeurs de x l'évènement M est-il plus probable que l'évènement contraire $\overline{\text{M}}$?

62. France septembre 1999

Dans tout l'exercice, on donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient trois boules noires et une boule blanche. On considère l'expérience suivante :

On lance un jeton parfaitement équilibré, présentant une face noire et une face blanche. Si le jeton tombe sur la face blanche, on ajoute une boule blanche dans l'urne ; si le jeton tombe sur la face noire, on ajoute une boule noire dans l'urne.

Puis on tire simultanément, et au hasard, trois boules de l'urne.

1. On appelle E_0 l'évènement : « Aucune boule blanche ne figure parmi les trois boules tirées » et B l'évènement : « Le jeton est tombé sur la face blanche ».

a. Calculer $P(E_0 \cap B)$, $P(E_0 \cap \overline{B})$, puis $P(E_0)$.

b. On tire trois boules de l'urne, aucune boule blanche ne figure dans ce tirage. Quelle est la probabilité que le jeton soit tombé sur la face noire ?

2. On appelle E_1 l'évènement : « Une boule blanche et une seule figure parmi les trois boules tirées » et B l'évènement : « Le jeton est tombé sur la face blanche ».

a. Calculer la probabilité de l'évènement E_1.

b. On effectue successivement quatre fois l'expérience décrite au début, qui consiste à lancer le jeton, puis à tirer les trois boules de l'urne.

Quelle est la probabilité d'obtenir, au moins une fois, une et une seule boule blanche ?

63. Sportifs de haut-niveau septembre 1999

Une urne contient quatre boules rouges, quatre boules blanches et quatre boules noires.
On prélève simultanément quatre boules dans l'urne. Les prélèvements sont supposés équiprobables.

1. Calculer la probabilité d'un prélèvement unicolore.
2. a. Quelle est la probabilité d'un prélèvement bicolore composé de boules rouges et blanches ?

   b. Démontrer que la probabilité d'un prélèvement bicolore est $\dfrac{68}{165}$.
3. Déduire des résultats précédents la probabilité d'un prélèvement tricolore.
4. Quelle est la probabilité d'avoir exactement deux boules rouges sachant que le prélèvement est bicolore ?

Livret réalisé grâce à Cocoa booklet. Merci à son auteur Fabien Cornus.
http ://www.iconus.ch/fabien/cocoabooklet/