Baccalauréat S Nombres complexes

Index des exercices sur les complexes de 1999 à 2005

Tapuscrit : Denis Vergès

N$^{\text{o}}$	Lieu et date	Q.C.M.	Algébrique	Géométrie	Application $z' = f(z)$
1	Amérique du Nord juin 2005	×		×	
2	Antilles juin 2005				×
3	Asie juin 2005		×	×	
4	Centres étrangers juin 2005			×	×
5	France juin 2005			×	
6	Liban juin 2005		×		
7	La Réunion septembre 2004		×	×	
8	Nlle–Calédonie nov. 2004			×	×
9	Polynésie septembre 2004		×	×	
10	Antilles septembre 2004		×	×	
11	Amérique du Nord mai 2004				
12	Antilles juin 2004	×	×		
13	Asie juin 2004		×	×	
14	Centres étrangers juin 2004			×	×
15	France juin 2004		×	×	
16	Liban juin 2004		×	×	
17	Polynésie juin 2004			×	
18	La Réunion juin 2004			×	×
19	Nlle–Calédonie mars 2004			×	
20	Pondichéry avril 2004		×	×	
21	Amérique du Sud nov. 2003			×	
22	France septembre 2003			×	
23	Amérique du Nord juin 2003			×	
24	Antilles juin 2003			×	
25	Asie juin 2003			×	×
26	France juin 2003			×	
27	Liban juin 2003			×	
28	Nlle–Calédonie mars 2003			×	×
29	Polynésie juin 2003			×	
30	Pondichéry mars 2003		×	×	
31	Amérique du Sud déc. 2002			×	×
32	Antilles septembre 2002		×		
33	France septembre 2002			×	×
34	Nlle–Calédonie nov. 2002		×	×	
35	Polynésie septembre2002		×	×	×
36	Amérique du Nord juin 2002			×	×
37	Antilles juin 2002			×	
38	Asie juin 2002		×		×
39	Centres étrangers juin 2002				×
40	France juin 2002		×	×	

Index des exercices sur les complexes de 1999 à 2005

N^{o}	Lieu et date	Q.C.M.	Algébrique	Géométrie	Application $z' = f(z)$
41	La Réunion juin 2002		×	×	×
42	Polynésie juin 2002			×	×
43	Pondichéry juin 2002		×	×	
44	Antilles septembre 2001			×	
45	France septembre 2001		×	×	
46	Polynésie septembre 2001		×		×
47	Amérique du Nord juin 2001			×	×
48	Antilles juin 2001		×	×	
49	Asie mars 2001			×	×
50	France juin 2001			×	×
51	Liban juin 2001			×	
52	Polynésie juin 2001			×	×
53	Pondichéry juin 2001			×	×
54	Amérique Sud nov. 2000			×	
55	Nlle–Calédonie déc. 2000		×	×	
56	Antilles–Guyane sept. 2000		×	×	
57	Amérique du Nord juin 2000			×	×
58	Antilles–Guyane juin 2000		×	×	
59	Asie juin 2000			×	
60	France juin 2000			×	
61	La Réunion juin 2000		×	×	
62	Liban juin 2000			×	×
63	Polynésie juin 2000			×	×
64	Pondichéry juin 2000			×	×
65	France septembre 1999			×	
66	Nlle–Calédonie déc. 1999			×	
67	Sportifs haut-niveau sept. 1999		×	×	
68	Amérique du Nord 1999		×		
69	Antilles–Guyane juin 1999			×	
70	Asie juin 1999		×		
71	Centres étrangers juin 1999		×		
72	France juin 1999		×		
73	Liban juin 1999		×	×	
74	Polynésie juin 1999		×		×
75	Pondichéry mai 1999		×	×	
76	Amérique du Sud nov. 1998		×		×
77	Antilles septembre 1999		×		×
78	France septembre 1998		×	×	
79	Polynésie septembre 1998		×	×	

1. Amérique du Nord juin 2005

Pour chacune des quatre questions de ce QCM, une seule des quatre propositions est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

Une réponse exacte rapporte 1 point. Une réponse inexacte enlève 0,5 point. L'absence de réponse n'apporte ni n'enlève aucun point. Si le total est négatif, la note de l'exercice est ramenée à 0.

1. Dans le plan complexe, on donne les points A, B et C d'affixes respectives
$-2+3\text{i},\ -3-\text{i}$ et $2,08+1,98\text{i}$. Le triangle ABC est :
(a) : isocèle et non rectangle **(b)** : rectangle et non isocèle
(c) : rectangle et isocèle **(d)** : ni rectangle ni isocèle

2. À tout nombre complexe $z \neq -2$, on associe le nombre complexe z' défini par : $z' = \dfrac{z-4\text{i}}{z+2}$.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$ est :
(a) : un cercle de rayon 1 **(b)** : une droite
(c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

3. Les notations sont les mêmes qu'à la question 2.
L'ensemble des points M d'affixe z tels que z' est un réel est :
(a) : un cercle **(b)** : une droite
(c) : une droite privée d'un point **(d)** : un cercle privé d'un point

4. Dans le plan complexe, on donne le point D d'affixe i. L'écriture complexe de la rotation de centre D et d'angle $-\dfrac{\pi}{3}$ est :
(a) : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$ **(b)** : $z' = \left(-\dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$
(c) : $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z - \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\text{i}$ $z' = \left(\dfrac{1}{2} - \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)z + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$

2. Antilles–Guyane juin 2005

$\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.

Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe -1.

Soit F l'application de $\mathscr{P}$ privé de O dans $\mathscr{P}$ qui à tout point M d'affixe z distinct de O associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1. **a.** Soit E le point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$; on appelle E' son image par F. Déterminer l'affixe de E' sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

   b. On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application F.

2. **a.** Soit K le point d'affixe $2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$ et K' l'image de K par F.
   Calculer l'affixe de K'.

   b. Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_2$ par l'application F.

3. On désigne par R un point d'affixe $1+\text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$. R appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1.

   a. Montrer que $z'+1 = \dfrac{\overline{z}-1}{\overline{z}}$.
   En déduire que : $\left|z'+1\right| = \left|z'\right|$.

   b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1+\text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\,;\,\pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat du **a.**.

3. Asie juin 2005

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique 1 cm).
On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation (E) d'inconnue z suivante :

$$z^3 + (-8+\text{i})z^2 + (17-8\text{i})z + 17\text{i} = 0.$$

I. Résolution de l'équation (E).

1. Montrer que $-\text{i}$ est solution de (E).
2. Déterminer les nombres réels $a,\ b,\ c$ tels que :

$$z^3 + (-8+\text{i})z^2 + (17-8\text{i})z + 17\text{i} = (z+\text{i})\left(az^2+bz+c\right).$$

3. Résoudre l'équation (E) dans l'ensemble des nombres complexes.

II. On appelle A, B et C les points d'affixes respectives $4+\text{i},\ 4-\text{i}, -\text{i}$.

1. Placer les points sur une figure que l'on complétera dans la suite de l'exercice.
2. Le point Ω est le point d'affixe 2. On appelle S l'image de A par la rotation de centre Ω et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{2}$. Calculer l'affixe de S.
3. Démontrer que les points B, A, S, C appartiennent à un même cercle $\mathscr{C}$ dont on déterminera le centre et le rayon. Tracer $\mathscr{C}$.
4. À tout point M d'affixe $z \neq 2$, on associe le point M' d'affixe $z' = \dfrac{\text{i}z+10-2\text{i}}{z-2}$.
   a. Déterminer les affixes des points $A',\ B',\ C'$ associés respectivement aux points A, B et C.
   b. Vérifier que $A',\ B',\ C'$ appartiennent à un cercle $\mathscr{C}'$ de centre P, d'affixe i. Déterminer son rayon et tracer $\mathscr{C}'$.
   c. Pour tout nombre complexe $z \neq 2$, exprimer $|z'-\text{i}|$ en fonction de z.
   d. Soit M un point d'affixe z appartenant au cercle $\mathscr{C}$. Démontrer que
   $|z'-\text{i}| = 2\sqrt{5}$.
   e. En déduire à quel ensemble appartiennent les points M' associés aux points M du cercle $\mathscr{C}$.

4. Centres étrangers juin 2005

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ unité graphique 8 cm.

On appelle A le point d'affixe -1 et B le point d'affixe 1.

On appelle $\mathscr{E}$ l'ensemble des points du plan distincts de A, O et B.

À tout point M d'affixe z appartenant à l'ensemble $\mathscr{E}$, on associe le point N d'affixe z^2 et le point P d'affixe z^3.

1. Prouver que les points M, N et P sont deux à deux distincts.

2. On se propose dans cette question de déterminer l'ensemble $\mathscr{C}$ des points M appartenant à $\mathscr{E}$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P.

a. En utilisant le théorème de Pythagore, démontrer que MNP est rectangle en P si et seulement si $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$.

b. Démontrer que $|z+1|^2 + |z|^2 = 1$ équivaut à $\left(z+\frac{1}{2}\right)\left(\overline{z+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{4}$.

c. En déduire l'ensemble $\mathscr{C}$ cherché.

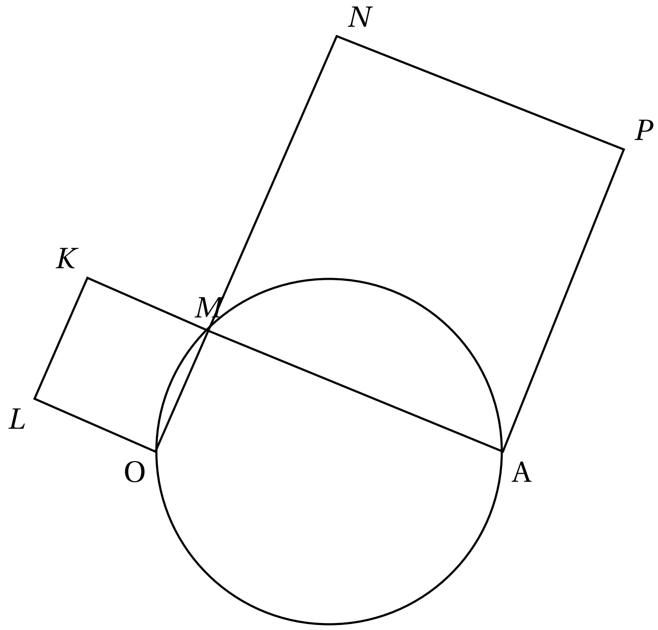
3. Soit M un point de $\mathscr{E}$ et z son affixe, On désigne par r le module de z et α l'argument de z, $\alpha \in]-\pi\ ;\ \pi]$.

a. Démontrer que l'ensemble $\mathscr{F}$ des points M de $\mathscr{E}$ tels que l'affixe de P soit un réel strictement positif est la réunion de trois demi-droites (éventuellement privées de points).

b. Représenter les ensembles $\mathscr{C}$ et $\mathscr{F}$ dans le repère $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

c. Déterminer les affixes des points M de $\mathscr{E}$ tels que le triangle MNP soit rectangle en P, l'affixe de P étant un réel strictement positif.

5. France juin 2005



Dans le plan orienté, on considère les points O et A fixés et distincts, le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [OA], un point M variable appartenant au cercle $\mathscr{C}$, et distinct des points O et A, ainsi que les carrés de sens direct $MAPN$ et $MKLO$. La figure est représentée ci-dessus.

Le but de l'exercice est de mettre en évidence quelques éléments invariants de la figure et de montrer que le point N appartient à un cercle à déterminer.

On munit le plan complexe d'un repère orthonormal direct de sorte que les affixes des points O et A soient respectivement 0 et 1.

On désigne par i le nombre complexe de module 1 et d'argument $\frac{\pi}{2}$. On note $k,\ l,\ m,\ n$ et p les affixes respectives des points $K,\ L,\ M,\ N$ et P.

1. Démontrer que, quel que soit le point M choisi sur le cercle $\mathscr{C}$, on a $\left|m-\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2}$.
2. Établir les relations suivantes : $l = \mathrm{i}m$ et $p = -\mathrm{i}m + 1 + \mathrm{i}$. On admettra que l'on a également $n = (1-\mathrm{i})m + \mathrm{i}$ et $k = (1+\mathrm{i})m$.
3. **a.** Démontrer que le milieu Ω du segment [PL] est un point indépendant de la position du point M sur le cercle $\mathscr{C}$.

   b. Démontrer que le point Ω appartient au cercle $\mathscr{C}$ et préciser sa position sur ce cercle.
4. **a.** Calculer la distance KN et démontrer que cette distance est constante.

   b. Quelle est la nature du triangle ΩNK ?

5. Démontrer que le point N appartient à un cercle fixe, indépendant du point M, dont on déterminera le centre et le rayon.

6. Liban juin 2005

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Unité graphique : 0,5cm.

On note j le nombre complexe $e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.

Soit A' l'image de B par la rotation de centre C et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit B' l'image de C par la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Soit C' l'image de A par la rotation de centre B et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

1. Placer les points A, B, C, A', B' et C' dans le repère donné.

2. On appelle a', b' et c' les affixes respectives des points A', B' et C'.

a. Calculer a'. On vérifiera que a' est un nombre réel.

b. Montrer que $b' = 16e^{-i\frac{\Pi}{3}}$.
En déduire que O est un point de la droite (BB').

c. On admet que $c' = 7 + 7i\sqrt{3}$.
Montrer que les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes en O.

3. On se propose désormais de montrer que la distance $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

a. Calculer la distance OA + OB + OC.

b. Montrer que $j^3 = 1$ et que $1 + j + j^2 = 0$.

c. On considère un point M quelconque d'affixe z du plan complexe.
On rappelle que $a = 8$, $b = 6j$ et $c = 8j^2$.
Déduire des questions précédentes les égalités suivantes :

$$\left|(a-z)+(b-z)j^2+(c-z)j\right| = \left|a+bj^2+cj\right| = 22.$$

d. On admet que, quels que soient les nombres complexes z, z' et z'' :

$$\left|z+z'+z''\right| \leqslant |z| + \left|z'\right| + \left|z''\right|.$$

Montrer que $MA + MB + MC$ est minimale lorsque $M = O$.

7. La Réunion septembre 2004

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

   Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.

   Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Donner la valeur exacte $(z')^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; (unité graphique : 2 cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1 + \text{i}\sqrt{3}$ et B d'affixe $1 - \text{i}\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

   Tracer ce cercle puis construire les points A et B.

2. On note O$'$ l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$, et B$'$ l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

   Calculer les affixes des points O$'$ B$'$ et construire ces points.

3. Soit I le milieu du segment [OB].

   a. Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle AO$'$B$'$?

   b. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{AI}}$.

   Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{O}'\text{B}'}$ est égale à $3\sqrt{3} - \text{i}$.

   c. La conjecture émise à la question **b.** est-elle vraie ?

8. Nouvelle–Calédonie novembre 2004

Dans le plan complexe rapport un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère l'application f du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 4z.$$

1. Soient A et B les points d'affixes $z_{\text{A}} = 1 - \text{i}$ et $z_{\text{B}} = 3 + \text{i}$.

a. Calculer les affixes des points A$'$ et B$'$ images des points A et B par f.

b. On suppose que deux points ont la même image par f. Démontrer qu'ils sont confondus ou que l'un est l'image de l'autre par une symétrie centrale que l'on précisera.

2. Soit I le point d'affixe -3.

a. Démontrer que OMIM' est un parallélogramme si et seulement si $z^2 - 3z + 3 = 0$.

b. Résoudre l'équation $z^2 - 3z + 3 = 0$.

3. **a.** Exprimer $(z' + 4)$ en fonction de $(z - 2)$. En déduire une relation entre $|z' + 4|$ et $|z - 2|$ puis entre $\arg(z' + 4)$ et $\arg(z - 2)$.

b. On considre les points J et K d'affixes respectives $z_{\text{J}} = 2$ et $z_{\text{K}} = -4$.

Démontrer que tous les points M du cercle $(\mathscr{C})$ de centre J et de rayon 2 ont leur image M' sur un même cercle que l'on déterminera.

c. Soit E le point d'affixe $z_{\text{E}} = -4 - 3\text{i}$.

Donner la forme trigonométrique de $(z_{\text{E}} + 4)$ et l'aide du **3. a.** démontrer qu'il existe deux points dont l'image par f est le point E.

Préciser sous forme algébrique l'affixe de ces deux points.

9. Polynésie septembre 2004

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

Pour tout point M du plan d'affixe z on considère les points M' et M'' d'affixes respectives

$$z' = z - 2 \qquad \text{et} \qquad z'' = z^2.$$

1. **a.** Déterminer les points M pour lesquels $M'' = M$.

   b. Déterminer les points M pour lesquels $M'' = M'$.

2. Montrer qu'il existe exactement deux points M_1 et M_2 dont les images M_1', M_1'', M_2' et M_2'' appartiennent à l'axe des ordonnées. Montrer que leurs affixes sont conjuguées.

3. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ où x et y sont des nombres réels.

   a. Exprimer sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z'' - z}{z' - z}$.

   b. En déduire l'ensemble E des points M du plan pour lesquels les points M, M' et M'' sont alignés. Représenter E graphiquement et en couleur.

4. On pose $z = \sqrt{3}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ où $\theta \in \left[0\ ;\ \dfrac{\pi}{2}\right]$.

   a. Déterminer l'ensemble Γ des points M d'affixe z ainsi définis et chacun des ensembles Γ' et Γ'' des points M' et M'' associés à M.

   b. Représenter Γ, Γ' et Γ'' sur la figure précédente.

   c. Dans cette question $\theta = \dfrac{\pi}{6}$. Placer le point M_3 obtenu pour cette valeur de θ, et les points M_3' et M_3'' qui lui sont associés. Montrer que le triangle $\mathrm{M}_3\mathrm{M}_3'\mathrm{M}_3''$ est rectangle. Est-il isocèle ?

10. Antilles septembre 2004

$\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$est un repère orthonormal du plan $\mathscr{P}$.

Soit A le point d'affixe 1 ; soit B le point d'affixe -1.

Soit F l'application de $\mathscr{P}$ privé de O dans $\mathscr{P}$ qui, à tout point M distinct de O, d'affixe z , associe le point $M' = F(M)$ d'affixe $z' = \dfrac{-1}{\overline{z}}$.

1. **a.** Soit E le point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}$, on appelle E′ son image par F. Déterminer l'affixe de E′ sous forme exponentielle, puis sous forme algébrique.

b. On note $\mathscr{C}_1$ le cercle de centre O et de rayon 1. Déterminer l'image de $\mathscr{C}_1$ par l'application F.

2. **a.** Soit K le point d'affixe $2\text{e}^{\text{i}\frac{5\pi}{6}}$ et K′ l'image de K par F. Calculer l'affixe de K′.

b. Soit $\mathscr{C}_2$ le cercle de centre O et de rayon 2. Déterminer l'i mage de $\mathscr{C}_2$ par l'application F.

3. On désigne par R un point d'affixe $1 + \text{e}^{\text{i}\theta}$ où $\theta \in]-\pi\ ;\ \pi[$; R appartient au cercle $\mathscr{C}_3$ de centre A et de rayon 1.

a. Montrer que $z' + 1 = \dfrac{\overline{z} - 1}{\overline{z}}$.

En déduire que $\left|z' + 1\right| = \left|z'\right|$.

b. Si on considère maintenant les points d'affixe $1 + \text{e}^{\text{i}\theta}$ où θ décrit l'intervalle $]-\pi\ ;\ \pi[$, montrer que leurs images sont situées sur une droite. On pourra utiliser le résultat de **a.**.

11. Amérique du Nord mai 2004

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. On veut résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(\text{E}) \qquad : z^3 + 4z^2 + 2z - 28 = 0.$$

a. Déterminer deux réels a et b tels que l'équation (E) s'écrive :

$$(z-2)(z^2 + az + b) = 0.$$

b. Résoudre (E)

2. On note (H) l'ensemble des points M du plan complexe d'affixe z vérifiant :

$$z^2 - 4 = 4 - \overline{z}^2.$$

a. On note x et y les parties réelle et imaginaire de l'affixe z d'un point M.

Montrer que : M appartient (H) si et seulement si

$$x^2 - y^2 = 4.$$

b. Soient A, B et C les points d'affixes respectives 2, $-3 - \text{i}\sqrt{5}$ et $-3 + \text{i}\sqrt{5}$. Vérifier que A, B et C appartiennent à (H).

3. Soit r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

a. Déterminer les affixes de A$'$, B$'$ et C$'$, images respectives de A, B et C par la rotation r (on donnera ces affixes sous la forme algébrique).

b. On note M' l'image par r du point M d'affixe z. On note z' l'affixe de M'. Les parties réelle et imaginaire de z sont notées x et y, celles de z' sont notées x' et y'. On note (H$'$) l'ensemble des points du plan dont l'antécédent par r est un point de (H).

- Exprimer x et y en fonction de x' et y'.

- En utilisant la question **2. a.** prouver que M' appartient à (H$'$) si et seulement si

$$x'y' = -2.$$

4. Faire une figure sur laquelle on placera les points A, B, C, A$'$, B$'$, C$'$, la courbe (H$'$), puis la courbe (H).

12. Antilles juin 2004

Pour chaque question, une seule réponse est exacte. Chaque réponse juste rapporte 1 *point. Une absence de réponse n'est pas sanctionnée. Il sera retiré* 0,5 *point par réponse fausse. On ne demande pas de justifier. La note finale de l'exercice ne peut être inférieure à zéro.*

On pose $z = -\sqrt{2+\sqrt{2}} + \mathrm{i}\sqrt{2-\sqrt{2}}$.

1. La forme algébrique de z^2 est :

A : $2\sqrt{2}$ $\quad$ B : $2\sqrt{2}-2\mathrm{i}\sqrt{2}$ $\quad$ C : $2+\sqrt{2}+\mathrm{i}\left(2-\sqrt{2}\right)$ $\quad$ D : $2\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}$

2. z^2 s'crit sous forme exponentielle :

A : $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\quad$ B : $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{4}}$ $\quad$ C : $4\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$ $\quad$ D : $4\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{3\pi}{4}}$

3. z s'crit sous forme exponentielle :

A : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{7\pi}{8}}$ $\quad$ B : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{8}}$ $\quad$ C : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{5\pi}{8}}$ $\quad$ D : $2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{3\pi}{8}}$

4. $\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$ et $\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ sont les cosinus et sinus de :

A : $\dfrac{7\pi}{8}$ $\quad$ B : $\dfrac{5\pi}{8}$ $\quad$ C : $\dfrac{3\pi}{8}$ $\quad$ D : $\dfrac{\pi}{8}$

13. Asie juin 2004

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}\right)$, unité graphique 1 cm.

Soit A le point d'affixe 3i. On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = \frac{3\text{i}z - 7}{z - 3\text{i}}.$$

1. Recherche des points invariants par f.

a. Développer $(z - 7\text{i})(z + \text{i})$.

b. Montrer que f admet deux points invariants B et C dont on précisera les affixes et qu'on placera sur un dessin.

2. On appelle Σ le cercle de diamètre [BC]. Soit M un point quelconque de Σ, distinct de B et de C, soit M' son image par f.

a. Justifier que l'affixe z de M vérifie : $z = 3\text{i} + 4\text{e}^{\text{i}\theta}$ où θ est un nombre réel.

b. Exprimer l'affixe z' de M' en fonction de θ et en déduire que M' appartient aussi à Σ.

c. Démontrer que $z' = -\overline{z}$ et en déduire, en la justifiant, une construction géométrique de M'.

3. On considère un cercle de centre A, de rayon $r > 0$. Déterminer l'image de ce cercle par f.

14. Centres étrangers juin 2004

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique : 2 cm.

On appelle A le point d'affixe -2i.

À tout point M du plan d'affixe z, on associe le point M' d'affixe

$$z' = -2\overline{z} + 2\text{i}.$$

1. On considère le point B d'affixe $b = 3 - 2\text{i}$.

Déterminer la forme algébrique des affixes a' et b' des points A' et B' associés respectivement aux points A et B. Placer ces points sur le dessin.

2. Montrer que si M appartient à la droite (Δ) d'équation $y = -2$ alors M' appartient aussi à (Δ).

3. Démontrer que pour tout point M d'affixe z , $\left|z' + 2\text{i}\right| = 2|z + 2\text{i}|$; interprétez géométriquement cette égalité.

4. Pour tout point M distinct de A on appelle θ un argument de $z + 2\text{i}$.

a. Justifier que θ est une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{\text{A}M}\right)$.

b. Démontrer que $(z + 2\text{i})(z' + 2\text{i})$ est un réel négatif ou nul.

c. En déduire un argument de $z' + 2\text{i}$ en fonction de θ.

d. Que peut-on en déduire pour les demi-droites $[\text{A}M)$ et $[\text{A}M')$?

5. En utilisant les résultats précédents, proposer une construction géométrique du point M' associé au point M.

15. France juin 2004

Dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, i désigne le nombre de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

1. Montrer que $(1+\mathrm{i})^6 = -8\mathrm{i}$.

2. On considère l'équation (E) : $z^2 = -8\mathrm{i}$.

  a. Déduire de **1.** une solution de l'équation (E).

  b. L'équation (E) possède une autre solution ; écrire cette solution sous forme algébrique.

3. Déduire également de **1.** une solution de l'équation (E') $z^3 = -8\mathrm{i}$.

4. On considère le point A d'affixe 2i et la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

  a. Déterminer l'affixe b du point B, image de A par r, ainsi que l'affixe c du point C, image de B par r.

  b. Montrer que b et c sont solutions de (E$'$).

5. **a.** Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique 2 cm), représenter les points A, B et C.

  b. Quelle est la nature de la figure que forment les images de ces solutions ?

  c. Déterminer le centre de gravité de cette figure.

16. Liban juin 2004

Le plan complexe est rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On prendra pour unité graphique 2 cm.

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$(z-2\text{i})\left(z^2-2z+2\right)=0.$$

Donner les solutions sous forme algébrique et sous forme exponentielle (justifier les réponses).

2. Soient A et B les points d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 1+\text{i}$ et $z_{\text{B}} = 2\text{i}$.
À tout complexe z différent de A on associe le complexe

$$z' = \frac{z-2\text{i}}{z-1-\text{i}}.$$

a. Soit (E) l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit imaginaire pur.
Montrer que $\text{B} \in (E)$.
Déterminer et construire l'ensemble (E).

b. Soit (F) l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\left|z'\right| = 1$.
Déterminer et construire (F).

3. Soit R la rotation de centre $\Omega\left(\frac{3}{2}\,;\,\frac{5}{2}\right)$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a. Calculer l'affixe du point B', image de B par R et l'affixe du point I', image par R du point $\text{I}\left(\frac{1}{2}\,;\,\frac{3}{2}\right)$.

b. Quelles sont les images de (E) et (F) par R ?

17. Polynésie juin 2004

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.
On prendra pour unité graphique 1 cm.

1. On désigne par A, B et I les points d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = 3 + 2\text{i}, \quad z_{\text{B}} = -3 \quad \text{et} \quad z_{\text{I}} = 1 - 2\text{i}.$$

a. Faire une figure que l'on complètera au cours de l'exercice.

b. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $Z = \dfrac{z_{\text{I}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{I}} - z_{\text{B}}}$.
Que peut-on en déduire sur la nature du triangle IAB ?

c. Calculer l'affixe z_C du point C image de I par l'homothétie de centre A et de rapport 2.

d. Soit D le barycentre du système $\{(\text{A},\ 1)\ ;\ (\text{B},\ -1)\ ;\ (C,\ 1)\}$; calculer l'affixe z_D du point D.

e. Montrer que ABCD est un carré.

2. Déterminer et construire l'ensemble Γ_1 des points M du plan tels que :

$$\left\|\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{MC}\right\| = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{M\text{A}} + \overrightarrow{MC}\right\|.$$

3. On considère l'ensemble Γ_2 des points M du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{M\text{A}} - \overrightarrow{M\text{B}} + \overrightarrow{MC}\right\| = 4\sqrt{5}.$$

a. Montrer que B appartient à Γ_2.

b. Déterminer et construire l'ensemble Γ_2.

18. La Réunion juin 2004

Le plan complexe est rapporté un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$;

i désigne le nombre complexe de module 1 et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.

Soient les points A, B et C d'affixes respectives i, $1+\text{i}$ et $-1+\text{i}$.

Soit f l'application qui, à tout point M du plan différent de A, d'affixe z, associe le point M' du plan d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{\text{i}z+2}{z-\text{i}}.$$

1. **a.** Déterminer les images de B et de C par l'application f.

   b. Montrer que, pour tout nombre complexe z différent de i, on a la relation :

   $$(z'-\text{i})(z-\text{i}) = 1.$$

   c. Soit D le point d'affixe 1 + 2i. Placer les points A, B, C et D sur une figure (unité graphique 4 cm).

   Déduire de la question précédente une construction du point D′ image du point D par l' application f.

2. Soit R un nombre réel strictement positif.

   Quelle est l'image par l'application f du cercle de centre A et de rayon R ?

3. **a.** Montrer que, si l'affixe du point M est un imaginaire pur différent de i, alors l'affixe du point M' est un imaginaire pur. Que signifie ce résultat pour l'image par l'application f de l'axe imaginaire privé du point A ?

   b. Soit $\mathscr{D}$ la droite passant par le point A et de vecteur directeur $\overrightarrow{u}$. Déterminer l' image de la droite $\mathscr{D}$ privée du point A par l'application f.

19. Nouvelle–Calédonie mars 2004

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$, on considère le quadrilatère ABCD tel que :

$$\left(\overrightarrow{\text{AB}},\ \overrightarrow{\text{AD}}\right) = \alpha \quad [2\pi],\ \left(\overrightarrow{\text{CD}},\ \overrightarrow{\text{CB}}\right) = \beta \quad [2\pi],\ 0 < \alpha < \pi,\ 0 < \beta < \pi.$$

On construit les triangles équilatéraux DCP, DAQ, BAM et BCN tels que :

$$\left(\overrightarrow{\text{DC}},\ \overrightarrow{\text{DP}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \qquad \left(\overrightarrow{\text{DA}},\ \overrightarrow{\text{DQ}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

$$\left(\overrightarrow{\text{BA}},\ \overrightarrow{\text{BM}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi] \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\text{BC}},\ \overrightarrow{\text{BN}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

Soit a, b, c et d les affixes respectives des points A, B, C et D, m, n, p et q les affixes respectives des points M, N, P et Q.

1. Démontrer les relations suivantes :

$$m = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(a-b)+b, \qquad n = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(c-b)+b,$$

$$p = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(c-d)+d, \qquad q = \text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{3}}(a-d)+d.$$

2. En utilisant les relations précédentes :

- **a.** Démontrer que MNPQ est un parallélogrammme.
- **b.** Démontrer que l'on a :

$$\left(\overrightarrow{\text{AC}},\ \overrightarrow{\text{QP}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \text{AC} = \text{QP}$$

$$\left(\overrightarrow{\text{NP}},\ \overrightarrow{\text{BD}}\right) = \frac{\pi}{3} \quad [2\pi], \quad \text{et} \quad \text{NP} = \text{BD}.$$

3. Démontrer que MNPQ est un carré si, et seulement si, les diagonales [AC] et [BD] du quadrilatère ABCD vérifient :

$$\text{AC} = \text{BD} \quad \text{et} \quad \left(\overrightarrow{\text{AC}},\ \overrightarrow{\text{BD}}\right) = \frac{\pi}{6} + k\pi$$

où k est un entier relatif.

20. Pondichéry avril 2004

Partie A

1. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation :

$$z^2 - 2z + 4 = 0.$$

   Les solutions seront notées z' et z'', z' désignant la solution dont la partie imaginaire est positive.

   Donner les solutions sous forme algébrique puis sous forme exponentielle.

2. Donner la valeur exacte de $\left(z'\right)^{2004}$ sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

Partie B

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; (unité graphique : 2 cm).

1. Montrer que les points A d'affixe $1 + \text{i}\sqrt{3}$ et B d'affixe $1 - \text{i}\sqrt{3}$ sont sur un même cercle de centre O dont on précisera le rayon.

   Tracer ce cercle puis construire les points A et B.

2. On note O′ l'image du point O par la rotation r_1 de centre A et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et B′ l'image du point B par la rotation r_2 de centre A et d'angle $+\dfrac{\pi}{2}$.

   Calculer les affixes des points O′ et B′ et construire ces points.

3. Soit I le milieu du segment [OB].

   a. Que peut-on conjecturer pour la droite (AI) dans le triangle AO′B′ ?

   b. Calculer l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{AI}}$.

   Montrer que l'affixe du vecteur $\overrightarrow{\text{O}'\text{B}'}$ est égale à $3\sqrt{3} - \text{i}$.

   c. La conjecture mise la **question a.** est-elle vraie ?.

21. Amérique du Sud novembre 2003

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique 4 cm).

Soit I le point d'affixe 1. On note $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [OI] et on nomme son centre Ω.

Partie I

On pose $a_0 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}\text{i}$ et on note A_0 son image.

1. Montrer que le point A_0 appartient au cercle $\mathscr{C}$.
2. Soit B le point d'affixe b, avec $b = -1 + 2\text{i}$, et B$'$ le point d'affixe b' telle que $b' = a_0 b$.

   a. Calculer b'.

   b. Démontrer que le triangle OBB$'$ est rectangle en B$'$.

Partie II

Soit a un nombre complexe non nul et différent de 1, et A son image dans le plan complexe.

À tout point M d'affixe z non nulle on associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = az$.

1. On se propose de déterminer l'ensemble des points A tels que le triangle OMM' soit rectangle en M'.

   a. Interpréter géométriquement $\arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right)$.

   b. Montrer que $\left(\overrightarrow{M'\text{O}}, \overrightarrow{M'M}\right) = \arg\left(\dfrac{a-1}{a}\right) + 2k\pi$ (o $k \in \mathbb{Z}$).

   c. En déduire que le triangle OMM' est rectangle en M' si et seulement si A appartient au cercle $\mathscr{C}$ privé de O et de I.

2. Dans cette question, M est un point de l'axe des abscisses, différent de O.

   On note x son affixe.

   On choisit a de manière que A soit un point de $\mathscr{C}$ différent de I et de O.

   Montrer que le point M' appartient la droite (OA).

   En déduire que M' est le projet orthogonal de M sur cette droite.

22. France septembre 2003

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$.

On considère les points A et Ω d'affixes respectives : $a = -1 + \sqrt{3} + \text{i}$ et $\omega = -1 + 2\text{i}$.

On appelle r la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$ et h l'homothétie de centre Ω et de rapport $-\dfrac{1}{2}$.

1. Placer sur une figure les points A et Ω, l'image B du point A par r, l'image C du point B par r et l'image D du point A par h.

2. On note b, c et d les affixes respectives des points B, C et D.

Le tableau ci-dessous contient une suite de 18 affirmations, dont chacune débute dans la première colonne et s'achève sur la même ligne colonne 2, colonne 3 ou colonne 4.

Le candidat doit se prononcer sur chacune de ces affirmations. Pour cela il doit remplir le tableau de la feuille annexe, en faisant figurer dans chacune des cases la mention VRAI ou FAUX (en toutes lettres).

1.	$\lvert a-\omega\rvert$	2	4	$\sqrt{3}-\text{i}$
2.	$\arg(a-\omega)$	$-\dfrac{5\pi}{6}$	$\dfrac{47\pi}{6}$	$\dfrac{\pi}{6}$

3.	$\left(\vec{v}, \overrightarrow{\Omega C}\right) =$	$\arg[(\omega - \text{i})]$	$-\left(\vec{v}, \overrightarrow{C\Omega}\right)$	$\dfrac{2\pi}{3}$
4.	$\omega =$	$\dfrac{1}{3}(a+b+c)$	$a+b+c$	$b-2\text{i}$

5.	$\dfrac{b-d}{a-d} =$	$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$	$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{i}$	$\dfrac{\sqrt{3}}{3}\text{i}$
6.	Le point D est	l'image de Ω par la translation de vecteur $\dfrac{1}{2}\overrightarrow{A\Omega}$	l'image de Ω par l'homothétie de centre A et de rapport $\dfrac{3}{2}$	l'image de Ω par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{6}$

23. Amérique du Nord juin 2003

Le plan est rapporté au repre orthonormé $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$, $z_{\mathrm{B}} = -1 - \mathrm{i}\sqrt{3}$ et $z_{\mathrm{C}} = 2$.

1. Placer ces points sur un dessin.

2. **a.** Vérifier que : $\dfrac{z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{C}}}{z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{C}}} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

b. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Déterminer le centre et le rayon du cercle Γ_1 circonscrit au triangle ABC.
Tracer le cercle Γ_1.

3. **a.** Établir que l'ensemble Γ_2 des points M d'affixe z qui vérifient $2(z + \overline{z}) + z\overline{z} = 0$ est un cercle de centre Ω d'affixe -2. Préciser son rayon. Construire Γ_2.

b. Vérifier que les points A et B sont éléments de Γ_2.

4. On appelle r_1 la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

a. Quelles sont les images des points A et B par la rotation r_1 ? Construire l'image C_1 du point C par la rotation r_1 puis calculer son affixe.

b. Déterminer l'image du cercle Γ_2 par la rotation r_1.

5. Soit r une rotation. Pour tout point M d'affixe z, on note M' l'image de M par r et z' l'affixe de M'.
On posera : $z' = az + b$, avec a et b des nombres complexes vérifiant $|a| = 1$ et $a \neq 1$.
On suppose que r transforme le cercle Γ_2 en le cercle Γ_1.

a. Quelle est l'image du point Ω par r ? En déduire une relation entre a et b.

b. Déterminer en fonction de a l'affixe du point $r(\mathrm{C})$, image du point C par la rotation r ; en déduire que le point $r(\mathrm{C})$ appartient un cercle fixe que l'on définira. Vérifier que ce cercle passe par C_1.

24. Antilles juin 2003

Le plan est rapporté au repère orthonormal $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$(unité graphique : 2 cm). On considère les points A et B d'affixes respectives A$(3+2i)$ et B$(-1+4i)$. Extérieurement au triangle OAB, on construit les deux carrés OA_1A_2A et OBB_1B_2.

1. **a.** En remarquant que A_2 est l'image de O par une rotation de centre A, déterminer l'affixe de A_2. En déduire l'affixe du centre I du carré OA_1A_2A.

   b. En remarquant que B_1 est l'image de O par une rotation de centre B, déterminer l'affixe de B_1. En déduire l'affixe du centre J du carré OBB_1B_2.

   c. Calculer l'affixe du milieu K du segment [AB]. À l'aide des affixes des différents points, calculer les longueurs KI et KJ, ainsi qu'une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{KI}, \overrightarrow{KJ}\right)$. Que peut-on en déduire ?

25. Asie juin 2003

Γ est le cercle de centre O et de rayon $2\sqrt{2}$.
Le plan est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = z^2 - 2(1+\text{i})z.$$

On pose $z = x + \text{i}y$ et $z' = x' + \text{i}y'$, où $x,\ y,\ x'$ et y' sont des nombres réels.

a. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b. Soit $\mathscr{H}$ l'ensemble des points M tels que z' soit un nombre réel. Montrer que $\mathscr{H}$ est la représentation graphique d'une fonction h que l'on déterminera (l'étude de la ronction h n'est pas demandée). $\mathscr{H}$ est tracée sur ie graphique ci-dessous.

2. Montrer que le point A d'affixe $a = 2(1+\text{i})$ appartient à Γ et $\mathscr{H}$.

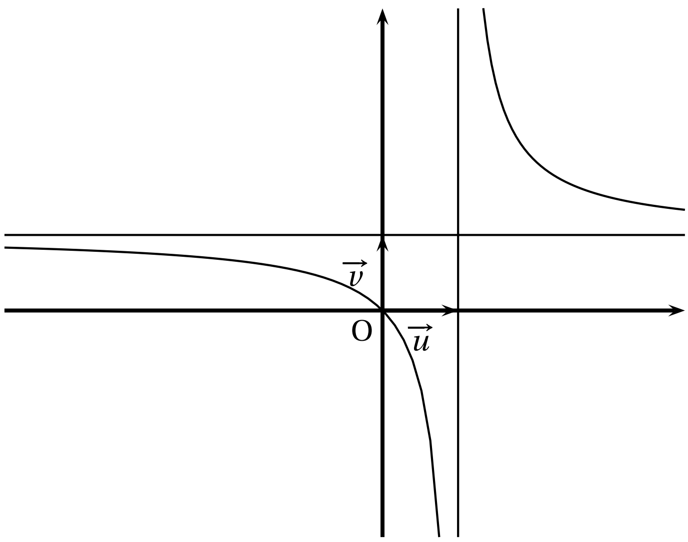
3. Soit R la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. On note B et C les points tels que R(A) = B et R(C) = A.

a. Montrer que R(B) = C et que les triangles OAB, OBC et OCA sont isométriques.

b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

c. Montrer que B et C appartiennent à Γ et $\mathscr{H}$.

d. Tracer Γ et placer A, B et C sur le graphique ci-dessous.



26. France juin 2003

Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$(unité graphique : 2 cm), on considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 2$, $b = 1 - \text{i}$ et $c = 1 + \text{i}$.

1. **a.** Placer les points A, B et C sur une figure.

   b. Calculer $\dfrac{c-a}{b-a}$. En déduire que le triangle ABC est rectangle isocèle.

2. **a.** On appelle r la rotation de centre A telle que $r(\text{B}) = \text{C}$.
   Déterminer l'angle de r et calculer l'affixe d du point $\text{D} = r(\text{C})$.

   b. Soit Γ le cercle de diamètre [BC].
   Déterminer et construire l'image Γ' du cercle Γ par la rotation r.

3. Soit M un point de Γ d'affixe z, distinct de C et M' d'affixe z' son image par r.

   a. Montrer qu'il existe un réel θ appartenant à $\left[0\,;\,\dfrac{\pi}{2}\right[\cup \left]\dfrac{\pi}{2}\,;\,2\pi\right[$ tel que $z = 1 + \text{e}^{\text{i}\theta}$.

   b. Exprimer z' en fonction de θ.

   c. Montrer que $\dfrac{z'-c}{z-c}$ est un réel. En déduire que les points C, M et M' sont alignés.

   d. Placer sur la figure le point M d'affixe $1 + \text{e}^{\text{i}\frac{2\pi}{3}}$ et construire son image M′ par r.

27. Liban juin 2003

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$4z^2 - 12z + 153 = 0.$$

2. Dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, d'unité graphique 1 cm on considère les points A, B, C, P d'affixes respectives : $z_A = \frac{3}{2} + 6i$, $z_B = \frac{3}{2} - 6i$; $z_C = -3 - \frac{1}{4}i$, $z_P = 3 + 2i$ et le vecteur $\vec{w}$ d'affixe $z_{\vec{w}} = -1 + \frac{5}{2}i$.

a. Déterminer l'affixe z_Q du point Q, image du point B dans la translation t de vecteur $\vec{w}$.

b. Déterminer l'affixe z_R du point R, image du point P par l'homothétie h de centre C et de rapport $-\frac{1}{3}$.

c. Déterminer l'affixe z_S du point S, image du point P par la rotation r de centre A et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Placer les points P, Q, R et S.

3. **a.** Démontrer que le quadrilatère PQRS est un parallélogramme.

b. Calculer $\dfrac{z_R - z_Q}{z_P - z_Q}$.

En déduire la nature précise du parallélogramme PQRS.

c. Justifier que les points P, Q, R et S appartiennent à un même cercle, noté $\mathscr{C}$. On calculera l'affixe de son centre Ω et son rayon ρ.

4. La droite (AP) est-elle tangente au cercle $\mathscr{C}$?

28. Nouvelle–Calédonie mars 2003

On se place dans le plan complexe muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On considère la transformation ponctuelle f qui, a tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$$z' = z^2 + 1.$$

1. Déterminer les antécédents du point O.
2. Existe-t-il des points invariants par f ? Si oui, préciser leurs affixes respectives.
3. Montrer que deux points symétriques par rapport à O ont la même image. Que peut-on dire des images de deux points symétriques par rapport à l'axe des abscisses ?
4. Soit A le point d'affixe $z_A = \dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+\text{i})$. Déterminer l'affixe du point A′ image de A par f puis prouver que les points O, A et A′ sont alignés.
5. Soit θ un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0\,;\,2\pi[$ et N le point d'affixe $\text{e}^{\text{i}\theta}$.

   a. Montrer que N appartient au cercle (X) de centre O et de rayon 1.

   b. Lorsque θ varie, montrer que N', image du point N par f reste sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

   c. Vérifier que $\overrightarrow{ON'} = 2\cos\theta\overrightarrow{ON}$. En déduire que les points O, N et N' sont alignés.

   d. Expliquer la construction du point N'.

29. Polynésie juin 2003

Dans tout l'exercice, le plan P est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

Les constructions seront faites sur papier millimtré.

1. **a.** Le point E a pour affixe $Z_{\text{E}} = 3+\text{i}$ et le point F a pour affixe $Z_{\text{F}} = 1+3\text{i}$.

   Placer dans P les points E et F.

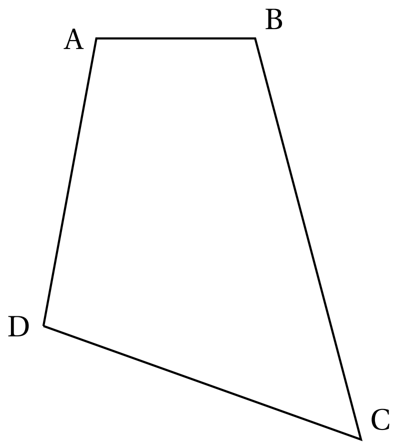
   b. Construire le point H tel que EHF soit un triangle rectangle isocèle direct de sommet H, c'est-à-dire tel que $\left(\overrightarrow{\text{HF}}\ ;\ \overrightarrow{\text{HE}}\right) = \dfrac{\pi}{2}[2\pi]$. [0,5 pt]

   c. On désigne par Z_{H} l'affixe de H.

   Montrer que $\left|\dfrac{3+\text{i}-Z_{\text{H}}}{1+3\text{i}-Z_{\text{H}}}\right| = 1$ et que $\arg\left(\dfrac{3+\text{i}-Z_{\text{H}}}{1+3\text{i}-Z_{\text{H}}}\right) = \dfrac{\pi}{2} \quad [2\pi]$.

   En déduire que $\text{Z}_{\text{H}} = 3+3\text{i}$.

2. A, B, C et D sont quatre points du plan P.



   a. Construire les triangles rectangles isocèles directs BIA, AJD, DKC et CLB d'angles droits respectifs $\widehat{\text{BIA}}$, $\widehat{\text{AJD}}$, $\widehat{\text{DKC}}$ et $\widehat{\text{CLB}}$.

   b. Conjecturer la position relative des droites (IK) et (LJ) et le rapport des longueurs des segments [IK] et [LJ].

3. **a.** On désigne par a, b et z_1 les affixes respectives des points A, B et I.

   Montrer que $\left|\dfrac{b-z_1}{a-z_1}\right| = 1$ et $\arg\left(\dfrac{b-z_1}{a-z_1}\right) = \dfrac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

   En déduire que $z_1 = \dfrac{\text{i}a-b}{\text{i}-1}$.

   b. Avec les points B, C et L d'affixes respectives b, c et z_{L}, exprimer sans démonstration z_{L} en fonction de b et c.

c. Avec les points C, D et K d'affixes respectives c, d et z_K, exprimer de même z_K en fonction de c et d. Avec les points D, A et J d'affixes respectives d, a et z_J exprimer de même z_J en fonction de a et d.

d. Montrer que $z_L - z_J = \text{i}\left(z_K - z_I\right)$. En déduire que les droites (JL) et (KI) sont perpendicu[aires et que JL = KI.

30. Pondichéry mars 2003

On considère dans l'ensemble des nombres complexes, l'équation suivante :

$$\text{(E)} \quad z^3 + 2z^2 - 16 = 0.$$

1. Montrer que 2 est solution de (E), puis que (E) peut s'écrire sous la forme : $(z-2)(az^2 + bz + c) = 0$, où a, b et c sont trois réels que l'on déterminera.
2. En déduire les solutions de l'équation (E) sous forme algébrique, puis sous forme exponentielle.

Deuxième partie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$.

1. Placer les points A, B et D d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -2-2\text{i},\ z_{\text{B}} = 2 \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = -2+2\text{i}.$$

2. Calculer l'affixe z_{C} du point C tel que ABCD soit un parallélogramme. Placer C.
3. Soit E l'image de C par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$ et F l'image de C par la rotation de centre D et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   - **a.** Calculer les affixes des points E et F, notées z_{E} et z_{F}.
   - **b.** Placer les points E et F.
4. **a.** Vérifier que : $\dfrac{z_{\text{F}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{E}} - z_{\text{A}}} = \text{i}$.
   - **b.** En déduire la nature du triangle AEF.
5. Soit I le milieu de [EF]. Déterminer l'image du triangle EBA par la rotation de centre I et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

31. Amérique du Sud décembre 2002

Dans le plan complexe, rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ on appelle A et B les points d'affixes respectives 2 et - 2. À tout point M d'affixe z, z différent de 2, on associe le point N d'affixe $\overline{z}$ et M' d'affixe z' tel que

$$z' = \frac{2z-4}{\overline{z}-2}$$

1. Calculer z' et $|\overline{z'}|$ lorsque $z = 5$ puis lorsque $z = 1 + \text{i}$.

2. **a.** Interpréter géométriquement $|z-2|$ et $|\overline{z'}-2|$.

   b. Montrer que, pour tout z distinct de 2, $|z'| = 2$. En déduire une information sur la position de M'.

3. Déterminer l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M d'affixe z $(z \neq 2)$ tels que M' = B.

4. On note $Z_{\overrightarrow{\text{A}M}}$ et $Z_{\overrightarrow{\text{B}M'}}$, les affixes respectives des vecteurs $\overrightarrow{\text{A}M}$ et $\overrightarrow{\text{B}M'}$.

   Montrer que, pour tout point M distinct de A et n'appartenant pas $\mathscr{E}$, le quotient $\dfrac{\overrightarrow{\text{A}M}}{\overrightarrow{\text{B}M'}}$ est un nombre réel. Interpréter géométriquement ce résultat.

5. Un point M distinct de A, n'appartenant pas $\mathscr{E}$, étant donné, proposer une méthode géométrique pour construire le point M'. On illustrera par une figure.

32. Antilles septembre 2002

Dans le plan complexe rapport au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$(unite graphique : 5 cm), on considère les points A et B d'affixes respectives

$$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i} \quad \text{et} \quad z_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\mathrm{i}.$$

On désigne par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre O et de rayon 1.

1. Donner la forme trigonométrique de z_{A} et celle de z_{B}.

2. Dans la suite de l'exercice, M désigne un point de $(\mathscr{C})$ d'affixe $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$, $\alpha \in [0\,;\,2\pi]$.

On considère l'application f qui tout point M de $(\mathscr{C})$, associe $f(M) = M\mathrm{A} \times M\mathrm{B}$.

a. Montrer, pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, l'égalité suivante :

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 = 2\mathrm{i}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}.$$

b. Montrer l'égalité suivante : $f(M) = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}2\alpha} - 1 - \left(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}\mathrm{i}\right)\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}\right|$.

c. En déduire l'égalité suivante : $f(M) = \sqrt{\frac{1}{4} + \left(-\frac{3}{2} + 2\sin\alpha\right)^2}$.

3. a. En utilisant **2. c.**, montrer qu'il existe deux points M de $(\mathscr{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lesquels $f(M)$ est minimal. Donner cette valeur minimale.

b. En utilisant **2. c.**, montrer qu'il existe un seul point M de $(\mathscr{C})$, dont on donnera les coordonnées, pour lequel $f(M)$ est maximal. Donner cette valeur maximale.

33. France septembre 2002

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ d'unité graphique 4 cm. On note A et B les points d'affixes respectives 1 et i. À tout point M, distinct de A et d'affixe z, est associé le point M' d'affixe Z définie par :

$$Z = \frac{(1-\text{i})(z-\text{i})}{z-1}.$$

1. **a.** Calculer l'affixe du point C′ associé au point C d'affixe $-\text{i}$.

   b. Placer les points A, B et C.

2. Soit $z = x + \text{i}y$ où x et y désignent deux nombres réels.

   a. Montrer l'égalité :

   $$Z = \frac{(x-1)^2+(y-1)^2-1}{(x-1)^2+y^2} - \frac{x^2+y^2-1}{(x-1)^2+y^2}.$$

   b. Déterminer l'ensemble E des points M d'affixe z telle que Z soit réel.

   c. Déterminer l'ensemble F des points M d'affixe z telle que $\text{Re}(Z)$ soit négatif ou nul.

3. **a.** Écrire le nombre complexe (1 - i) sous forme trigonométrique.

   b. Soit M un point d'affixe z, distinct de A et de B. Montrer que : $\dfrac{(1-\text{i})(z-\text{i})}{z-1} \in \mathbb{R}*$ si et seulement s'il existe un entier k tel que $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

   c. En déduire l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + k\pi$.

   d. Déterminer l'ensemble des points M vérifiant $\left(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}\right) = \dfrac{\pi}{4} + 2k\pi$.

34. Nouvelle–Calédonie novembre 2002

1. On considère le polynôme P de la variable complexe z, défini par :

$$P(z) = z^3 + (14 - \text{i}\sqrt{2})z^2 + \left(74 - 14\text{i}\sqrt{2}\right)z - 74\text{i}\sqrt{2}.$$

a. Déterminer le nombre réel y tel que iy soit solution de l'équation
$P(z) = 0$.

b. Trouver deux nombres réels a et b tels que, pour tout nombre complexe z, on ait $P(z) = (z - \text{i}\sqrt{2})(z^2 + az + b)$

c. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation
$P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$. On prendra 1 cm pour unité graphique.

a. Placer les points A, B et I d'affixes respectives $z_{\text{A}} = -7 + 5\text{i}$; $z_{\text{B}} = -7 - 5\text{i}$ et $z_{\text{I}} = \text{i}\sqrt{2}$.

b. Déterminer l'affixe de l'image du point I par la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{4}$.

c. Placer le point C d'affixe $z_{\text{C}} = 1 + \text{i}$. Déterminer l'affixe du point N tel que ABCN soit un paralllogramme.

d. Placer le point D d'affixe $z_{\text{D}} = 1 + 11\text{i}$. Calculer $Z = \dfrac{z_{\text{A}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{D}} - z_{\text{B}}}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique. Justifier que les droites (AC) et (BD) sont perpendiculaires et en déduire la nature du quadrilatre ABCD.

35. Polynésie septembre 2002

Partie A

1. z_1 et z_2 sont des nombres complexes ; résoudre le système d'équations suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} z_1\sqrt{3}-z_2 & = & -2 \\ z_1-z_2\sqrt{3} & = & -2\mathrm{i} \end{array}\right.$$

2. Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct de centre O, d'unité graphique 4 cm, on considère les points A et B d'affixes respectives :

$$z_A=-\sqrt{3}+\mathrm{i}, \qquad z_B=-1+\mathrm{i}\sqrt{3}.$$

Donner les écritures de z_A et z_B sous forme exponentielle.
Placer les points A et B.

3. Calculer module et argument de $\dfrac{z_A}{z_B}$.
En déduire la nature du triangle ABO et une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{OA}\ ;\ \overrightarrow{OB}\right)$.
4. Déterminer l'affixe du point C tel que ACBO soit un losange. Placer C. Calculer l'aire du triangle ABC en cm^2.

Partie B

Soit f la transformation qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z'=\mathrm{e}^{-\frac{\mathrm{i}\pi}{6}}z.$$

1. Définir cette transformation et donner ses éléments caractéristiques.
2. Quelles sont, sous forme exponentielle, les affixes de A′, B′, et C′ images par f de A, B et C ?
3. Quelle est l'aire du triangle A′B′C′ en cm^2 ?

36. Amérique du Nord juin 2002

Le plan est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$. On prendra 2 cm pour unité graphique.

On considère l'application F du plan dans lui même qui, à tout point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe z' tel que :

$$z' = (1+\text{i})z + 2.$$

1. Soit A le point d'affixe $-2+2\text{i}$.
Déterminer les affixes des points A′ et B vérifiant respectivement A′ = F(A) et F(B) = A.

2. Méthode de construction de l'image de M.

a. Montrer qu'il existe un point confondu avec son image. On notera Ω ce point et ω son affixe.

b. Établir que pour tout complexe z distinct de ω, $\dfrac{z'-z}{\omega-z} = -\text{i}$.
Soit M un point distinct de Ω.
Comparer MM' et $M\Omega$ et déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{M\Omega},\ \overrightarrow{MM'})$. En déduire une méthode de construction de M' à partir de M.

3. Étude de l'image d'un ensemble de points.

a. Donner la nature et les éléments caractéristiques de l'ensemble Γ, des points du plan dont l'affixe z vérifie $|z+2-2\text{i}| = \sqrt{2}$.
Vérifier que B est un point de Γ.

b. Démontrer que, pour tout z élément de $\mathbb{C}$

$$z'+2 = (1+\text{i})(z+2-2\text{i}).$$

Démontrer que l'image par F de tout point de Γ appartient au cercle Γ‘ de centre A′ et de rayon 2.
Placer O, A, B, A′, Γ et Γ‘ sur une même figure.

37. Antilles juin 2002

Le plan $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, (unité graphique 2 cm).

On considère les points I et A d'affixe respectives 1 et -2. Le point K est le milieu du segment [IA].

On appelle $(\mathscr{C})$ le cercle de diamètre [IA]. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure.

1. Soit B le point d'affixe $b = \dfrac{1+4\text{i}}{1-2\text{i}}$. Écrire b sous forme algébrique et montrer que B appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

2. Soit D le point du cercle $(\mathscr{C})$ tel que l'angle $\left(\overrightarrow{\text{KI}}, \overrightarrow{\text{KD}}\right) = \dfrac{\pi}{3} + 2k\pi$ où k est un entier relatif et soit d l'affixe de D.

- **a.** Quel est le module de $d + \dfrac{1}{2}$? Donner un argument de $d + \dfrac{1}{2}$.
- **b.** En déduire que $d = \dfrac{1}{4} + 3\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.
- **c.** Déterminer un réel a vérifiant l'égalité $\dfrac{1+2\text{i}a}{1-\text{i}a} = \dfrac{1}{4} + 3\text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{4}$.

3. Soit x un réel non nul et M le point d'affixe $m = \dfrac{1+2\text{i}x}{1-\text{i}x}$. On pose $Z = \dfrac{(m-1)}{(m+2)}$. Calculer Z et en déduire la nature du triangle AIM.

4. Soit N un point, différent de A du cercle $(\mathscr{C})$ et n son affixe.

Démontrer qu'il existe un réel y tel que $n = \dfrac{1+2\text{i}y}{1-\text{i}y}$.

38. Asie juin 2002

1. Dans le plan complexe $(\mathscr{P})$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on considère les quatre points A, B, C et D d'affixes respectives 3, 4i, $-2+3\text{i}$ et $1-\text{i}$.

a. Placer les points A, B, C et D dans le plan.

b. Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier votre réponse.

2. On considère dans l'ensemble des complexes les équations :

$$z^2-(1+3\text{i})z-6+9\text{i}=0 \;\; (1) \quad \text{et} \quad z^2-(1+3\text{i})z+4+4\text{i}=0 \;\; (2)$$

a. Montrer que l'équation (1) admet une solution réelle z_1, et l'équation (2) une solution imaginaire pure z_2.

b. Développer $(z-3)(z+2-3\text{i})$, puis $(z-4\text{i})(z-1+\text{i})$.

c. En déduire les solutions de l'équation :

$$\left(z^2-(1+3\text{i})z-6+9\text{i}\right)\left(z^2-(1+3\text{i})z+4+4\text{i}\right)=0.$$

d. Soit z_0 la solution dont la partie imaginaire est strictement négative. Donner la forme trigonométrique de z_0.

e. Déterminer les entiers naturels n tels que les points M_n d'affixes z_0^n soient sur la droite d'équation $y=x$.

3. On appelle f l'application qui au point M, d'affixe z, associe le point M', d'affixe z' telle que :

$$z'=z^2-(1+3\text{i})z-6+9\text{i}.$$

a. On pose $z=x+\text{i}y$ et $z'=x'+\text{i}y'$. Exprimer x' et y' en fonction de x et y.

b. Déterminer une équation de l'ensemble (H) des points M pour lesquels $f(M)$ appartient à l'axe des ordonnées.

39. Centres étrangers juin 2002

Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

Soit A le point d'affixe $z_{\text{A}} = \dfrac{\text{i}}{2}$.
$\mathscr{T}$ est l'application qui, à tout point M, d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que

$$2zz' = \text{i}(z + z').$$

1. On appelle I et J les points d'affixes respectives : $z_{\text{I}} = 1,\ z_{\text{J}} = \text{i}$. Soit K le milieu du segment [IJ].

   a. Déterminer l'affixe z_{K} de K.

   b. Déterminer les affixes des images des points I, J, K par l'application $\mathscr{T}$.

   c. En déduire que $\mathscr{T}$ ne conserve pas les milieux.

2. Déterminer les points invariants par $\mathscr{T}$.

3. Montrer que $M' = \mathscr{T}(M)$ si et seulement si $\left(z' - \dfrac{\text{i}}{2}\right)\left(z - \dfrac{\text{i}}{2}\right) = -\dfrac{1}{4}$.

4. En déduire l'image par $\mathscr{T}$ du cercle $\mathscr{C}$ de centre A et de rayon 1.

40. France juin 2002

Le plan complexe est rapporté àun repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$[unité graphique : 2 cm].

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0$.
On pose $a = \sqrt{3} + \text{i}$ et $b = \sqrt{3} - \text{i}$. Écrire a et b sous forme exponentielle et placer les points A et B d'affixes respectives a et b.

2. **a.** Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Calculer l'affixe a' du point A' image du point A par r. Écrire a' sous forme algébrique et placer A' sur la figure précédente.

b. Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $-\frac{3}{2}$. Calculer l'affixe b' du point B' image du point B par h. Placer B' sur la figure précédente.

3. Soit C le centre du cercle circonscrit au triangle O$A'B'$ et R le rayon de ce cercle. On désigne par c l'affixe du point C.

a. Justifier les égalités suivantes :

$$c\bar{c} = R^2 \qquad (c - 2\text{i})\,(\bar{c} + 2\text{i}) = R^2 \qquad \left(c + \frac{3\sqrt{3}}{2} - \frac{3}{2}\text{i}\right)\left(\bar{c} + \frac{3\sqrt{3}}{2} + \frac{3}{2}\text{i}\right) = R^2.$$

b. En déduire que $c - \bar{c} = 2\text{i}$ puis, que $c + \bar{c} = -\frac{4\sqrt{3}}{3}$.

c. En déduire l'affixe du point C et la valeur de R.

41. La Réunion juin 2002

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 1 cm).
On considère l'application f du plan dans lui-même, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = z^3 - 3z^2 + 3z$.

1. On considère les points B et C d'affixes respectives i et $i\sqrt{3}$.
Calculer les affixes des points images de O, B et C par f. Placer les points B, C et leurs images B′ et C′ sur une figure. L'application f conserve-t-elle l'alignement ?

2. Montrer qu'un point M d'affixe z est invariant par f si et seulement si z vérifie l'équation

$$z^3 - 3z^2 + 2z = 0.$$

En déduire que f possède trois points invariants, dont on déterminera les affixes.

3. **a.** Montrer pour tout z de $\mathbb{C}$ l'égalité suivante :

$$z' - 1 = (z-1)^3.$$

b. Soit z un nombre complexe différent de 1, on note r le module de $z - 1$ et α un argument de $z - 1$. Exprimer le module r' et un argument α' de $z' - 1$ en fonction de r et de α.
Soit A le point d'affixe 1, déduire des résultats précédents une relation entre la distance AM' et la distance AM, et une relation entre une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}\right)$ et une mesure de l'angle $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM}\right)$.

c. Montrer que si M appartient au cercle Γ de centre A et de rayon $\sqrt{2}$, alors M' appartient à un cercle Γ' de même centre dont on déterminera le rayon.

4. Montrer que, si M appartient à une demi-droite ouverte D d'origine A passant par le point B, alors M' appartient à une demi-droite D′'que l'on déterminera.
Justifier l'appartenance du point B′ à Γ' et à D′.
Compléter la figure avec les différents éléments : Γ, Γ', D et D′.

42. Polynésie juin 2002

Dans le plan complexe $\mathscr{P}$ rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$d'unité 2cm, on considère les points M d'affixe z, M_1 d'affixe $\overline{z}$, A d'affixe 2 et B d'affixe 1.
Soit f l'application de $\mathscr{P}$ privé de A dans $\mathscr{P}$, qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{\overline{z}+4}{\overline{z}-2}$.

1. Déterminer les points invariants par f.

2. Soit C le point d'affixe $2\left(1+\text{i}\sqrt{3}\right)$.
Montrer que C$'$ est le milieu du segment [OC].

3. **a.** Calculer pour tout z?2, le produit $\left(\overline{z}-2\right)\left(z'-1\right)$.

b. En déduire :
- la valeur de $\text{A}M_1 \cdot \text{B}M'$,
- une expression de $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{B}M'}\right)$ en fonction de $\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M_1}\right)$.

c. Justifier les relations :

$$\begin{array}{ll}(1) & \text{A}M \cdot \text{B}M' = 6 \\ (2) & \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{B}M'}\right) = \left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M}\right).\end{array}$$

d. Application : construire l'image D$'$ du point D d'affixe $2+2\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

43. Pondichéry juin 2002

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$; unité graphique 2 cm. On désigne par A le point d'affixe $z_{\mathrm{A}} = 1$, et par $(\mathscr{C})$ le cercle de centre A et de rayon 1.

Partie A

Soit F le point d'affixe 2, B le point d'affixe $z_{\mathrm{B}} = 1 + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$ et E le point d'affixe $\left(1 + z_{\mathrm{B}}^2\right)$.

1. **a.** Montrer que le point B appartient au cercle $(\mathscr{C})$.

   b. Déterminer une mesure en radians de l'angle de vecteurs $\left(\overrightarrow{\mathrm{AF}} ; \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)$. Placer le point B.
2. **a.** Déterminer la forme exponentielle des nombres complexes $(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})$ et $(z_{\mathrm{E}} - z_{\mathrm{A}})$.

   b. En déduire que les points A , B et E sont alignés.
3. Placer le point E.

Partie B

Pour tout nombre complexe z tel que $z \neq 1$, on considère les points M et M' d'affixes respectives z et z' où $z' = 1 + z^2$.

1. Pour $z \neq 0$ et $z \neq 1$, donner, à l'aide des points A, M et M', une interprétation géométrique d'un argument du nombre complexe $\dfrac{z' - 1}{z - 1}$.
2. En déduire que A, M et M' sont alignés si et seulement si $\dfrac{z^2}{z-1}$ est un réel.

44. Antilles septembre 2001

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation d'inconnue z :

$$z^2 + 8z\sqrt{3} + 64 = 0.$$

2. On considère les points A et B qui ont pour affixes respectives les nombres complexes $a = -4\sqrt{3} - 4\text{i}$ et $b = -4\sqrt{3} + 4\text{i}$.
Calculer les distances OA, OB et AB.
En déduire la nature du triangle OAB.
3. On désigne par C le point d'affixe $c = \sqrt{3} + \text{i}$ et par D son image par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$. Déterminer l'affixe d du point D.
4. On appelle G le barycentre des points pondérés (O ; -1), (D ; 1) et (B ; 1).
   a. Montrer que le point G a pour affixe $g = -4\sqrt{3} + 6\text{i}$.
   b. Placer les points A, B, C, D et G sur une figure. (Unité graphique : 1 cm).
   c. Démontrer que le quadrilatère OBGD est un parallélogramme.
5. **a.** Justifier l'égalité $\dfrac{c-g}{a-g} = \dfrac{1}{2} + \text{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
   b. En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{GA}}, \overrightarrow{\text{GC}}\right)$, ainsi que la valeur du rapport $\dfrac{\text{GC}}{\text{GA}}$.
   Que peut-on en déduire concernant la nature du triangle AGC ?

45. France septembre 2001

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ direct.
Soit A le point d'affixe i et B le point d'affixe - i.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{C} - \{\text{i}\}$ par :

$$f(z) = \frac{1 - \text{i}z}{z - \text{i}}.$$

1. Vérifier que pour tout z de $\mathbb{C} - \{\text{i}\}$

$$f(z) = -\text{i} + \frac{2}{z - \text{i}}.$$

2. **a.** Démontrer que - i n'a pas d'antécédent par f.

b. Déterminer les antécédents de 0 et de i par f.

3. À tout point M différent de A, d'affixe z, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = f(z)$.

a. Démontrer que pour tout point M différent de A, le produit des longueurs AM et BM' est égal à 2 $(\text{A}M \cdot \text{B}M' = 2)$.

b. Démontrer que lorsque M décrit le cercle C de centre A et de rayon 4, M' se déplace sur un cercle C' dont on précisera le centre et le rayon.

4. **a.** Déterminer l'ensemble E des points $M(z)$ tels que $z - \text{i}$ soit un nombre réel non nul.

b. Démontrer que lorsque M décrit E, M' se déplace sur une droite Δ que l'on précisera.

c. Lorsque M décrit E, M' décrit-il toute la droite Δ ?

5. Déterminer l'ensemble des points $M(z)$ tels que $f(z)$ soit un imaginaire pur non nul.

46. Polynésie septembre 2001

Dans le plan complexe $\mathcal{P}$ rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 4 cm, on considère les points A, B, C, D d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = 2\text{i}, \quad z_{\text{B}} = \text{i}, \quad z_{\text{C}} = -1+\text{i}, \quad z_{\text{D}} = 1+\text{i}.$$

On fera une figure qui sera complétée au fur et à mesure de l'exercice.

1. Soit la fonction f de $\mathcal{P}$ - {B} dans $\mathcal{P}$ qui au point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' où

$$z' = \text{i}\frac{z-2\text{i}}{z-\text{i}}.$$

a. Développer $(z+1-\text{i})(z-1-\text{i})$.

b. Chercher les points M vérifiant $f(M) = M$ et exprimer leurs affixes sous forme algébrique puis trigonométrique.

2. a. Montrer que, pour tout z différent de i,

$$|z'| = \frac{\text{AM}}{\text{BM}},$$

et que, pour tout z différent de i et de 2i,

$$\arg(z') = \left(\overrightarrow{\text{BM}}, \overrightarrow{\text{AM}}\right) + \frac{\pi}{2} \quad (\text{modulo} 2\pi).$$

b. Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M d'affixe z tels que $|z'| = 1$.

c. Déterminer et construire l'ensemble (F) des points M d'affixe z tels que $\arg(z') = \frac{\pi}{2} \quad (\text{modulo} \quad 2\pi)$.

3. a. Démontrer que $z' - \text{i} = \frac{1}{z-\text{i}}$ et en déduire que $|z'-\text{i}| \times |z-\text{i}| = 1$, pour tout complexe z différent de i.

b. Soit M un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre B et de rayon $\frac{1}{2}$. Prouver que le point M' d'affixe z' appartient à un cercle de centre B et de rayon à déterminer.

47. Amérique du Nord juin 2001

On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^4 - 6z^3 + 24z^2 - 18z + 63.$$

1. Calculer $P(\text{i}\sqrt{3})$ et $P(-\text{ i}\sqrt{3})$ puis montrer qu'il existe un polynôme Q du second degré à coefficients réels, que l'on déterminera, tel que, pour tout $z \in \mathbb{C}$, on ait $P(z) = (z^2 + 3)Q(z)$.
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $P(z) = 0$.
3. Placer dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, les points A, B, C, D d'affixes respectives $z_\text{A} = \text{i}\sqrt{3}$, $z_\text{B} = -\text{ i}\sqrt{3}$, $z_\text{C} = 3+2\text{i}\sqrt{3}$ et $z_\text{D} = \overline{z_\text{C}}$, puis montrer que ces quatre points appartiennent à un même cercle.
4. On note E le symétrique de D par rapport à O. Montrer que $\dfrac{z_\text{C} - z_\text{B}}{z_\text{E} - z_\text{B}} = \text{e}^{\frac{-\text{i}\pi}{3}}$ puis déterminer la nature du triangle BEC.

48. Antilles juin 2001

Dans le plan rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, on désigne par $M(z)$ le point M ayant pour affixe z.

1. Placer sur une figure les points A(2 + i), B(2i), C(−4 + 3i) et D(−8), en prenant 1 cm pour unité graphique.

2. Soit f la transformation du plan qui, à tout point $M(z)$, associe le point $M'(z')$ tel que :

$$z' = (1+2\text{i})z - 4 - 2\text{i}.$$

a. Préciser les images des points A et B par f.

b. Montrer que f admet un unique point fixe Ω, dont on précisera l'affixe ω (M est un point fixe pour f si, et seulement si, $f(M) = M$).

3. On admet que $\omega = 1 - 2\text{i}$. Soit M un point quelconque et M' son image par f.

a. Montrer que, pour tout complexe z on a : $z' - z = 2\text{i}(w - z)$.
Dans toute la suite, M est différent de Ω.

b. Déduire de la question précédente le rapport des distances $\dfrac{MM'}{\Omega M}$, et l'angle de vecteurs $(\overrightarrow{M\Omega}, \overrightarrow{MM'})$.

c. Déduire des questions précédentes une construction géométrique du point M', connaissant le point M.
Réaliser cette construction sur la figure de la question **1)**

49. Asie mars 2001

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On appelle f l'application qui, à tout point M d'affixe z ($z \neq -1$) associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{\text{i}z - 2}{z + 1}.$$

Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = -1$, $b = 2\text{i}$ et $c = \text{i}$.

1. Soit C′ l'image du point C par f. Donner l'affixe c' du point C′ sous forme algébrique, puis sous forme trigonométrique.
2. Calculer l'affixe d du point D ayant pour image par f le point D′ d'affixe $d' = \frac{1}{2}$.
3. Pour tout nombre complexe z différent de - 1, on note p le module de $z+1$ (c'est-à-dire $|z+1| = p$) et p' le module de $z' + \text{i}$ (c'est-à-dire $|z' + \text{i}| = p'$).

   a. Démontrer que, pour tout nombre complexe z différent de - 1, on a : $pp' = \sqrt{5}$.

   b. Si le point M appartient au cercle (Γ) de centre A et de rayon 2, montrer qu'alors $M' = f(M)$ appartient à un cercle (Γ'), dont on précisera le centre et le rayon.

4. Pour tout nombre complexe z différent de - 1, on considère le nombre complexe $\omega = \frac{z - 2\text{i}}{z + 1}$.

   a. Interpréter géométriquement l'argument du nombre complexe ω.

   b. Montrer que $z' = -\text{i}\omega$.

   c. Déterminer l'ensemble (F) des points M d'affixe z telle que z' soit un réel non nul.

   d. Vérifier que le point D appartient aux ensembles (Γ) et (F).

5. Représenter les ensembles (Γ), (F) et (Γ') en prenant 4 cm pour unité graphique.

50. France juin 2001

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ [unité graphique : 6 cm].

On considère la suite (α_n) de nombres réels définie par $\alpha_0 = \dfrac{\pi}{2}$ et, pour tout entier naturel n, $\alpha_{n+1} = \alpha_n + \dfrac{5\pi}{6}$. Pour tout entier naturel n, on appelle M_n le point du cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 1 tel que l'angle $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}M_n}\right)$ ait pour mesure α_n.

1. Placer les douze points $\mathrm{M}_0,\ \mathrm{M}_1,\ \mathrm{M}_2, \cdots, \mathrm{M}_{11}$.

2. On appelle z_n l'affixe de M_n. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité : $z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{5n\pi}{12}\right)}$.

3. **a.** Montrer, pour tout entier naturel n, les propriétés suivantes :

- les points M_n et M_{n+6} sont diamétralement opposés ;
- les points Mn et M_{n+12} sont confondus.

b. Montrer que, pour tout entier naturel n, on a l'égalité $z_{n+4} = \mathrm{e}^{-\frac{2\mathrm{i}\pi}{3}} z_n$.
En déduire que la distance M_nM_{n+4} vaut $\sqrt{3}$ puis que le triangle $M_nM_{n+4}M_{n+8}$, est équilatéral.
On admettra que tous les triangles équilatéraux ayant pour sommets des points M_n sont de la forme $M_nM_{n+4}M_{n+8}$.

4. Douze cartons indiscernables au toucher, marqués $\mathrm{M}_0,\ \mathrm{M}_1,\ \mathrm{M}_2, \cdots, \mathrm{M}_{11}$ sont disposés dans une urne. On tire au hasard et simultanément trois cartons de l'urne. Calculer la probabilité d'obtenir les trois sommets d'un triangle équilatéral.

51. Liban juin 2001

Les deux parties sont indépendantes.

Partie A

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, on considère les points A et B d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 3 + \text{i}$ et $z_{\text{B}} = 1 + 2\text{i}$.

1. Exprimer le complexe $\dfrac{z_{\text{B}}}{z_{\text{A}}}$ sous forme algébrique puis sous forme trigonométrique.
2. En déduire une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{OA}}, \overrightarrow{\text{OB}}\right)$.

Partie B

Désormais on considère l'espace muni du repère orthonormal direct $(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w})$ où $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.
On considère les points A(3, 1, 0), B(1, 2, 0), C(3, 2, 1) et $D(0, 0, d)$ où d désigne un réel positif ou nul. On a ainsi un tétraèdre ABCD.

1. On pose $\overrightarrow{\text{N}} = \overrightarrow{\text{AB}} \wedge \overrightarrow{\text{AC}}$.
   - **a.** Calculer les coordonnées de N .
   - **b.** En déduire l'aire du triangle ABC.
2. Déterminer une équation cartésienne du plan (ABC).
3. On note H le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC).
   - **a.** On pose $\overrightarrow{DH} = \lambda\overrightarrow{\text{N}}$.
     Calculer λ en fonction de d.
   - **b.** En déduire l'expression de la distance DH.
     Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est $\text{V}_d = \dfrac{2d+5}{6}$.
4. Déterminer pour quelle valeur de d la droite (DB) est perpendiculaire au plan (ABC).
5. On suppose que $d = 0$. Calculer la distance de A au plan (OBC).

52. Polynésie juin 2001

Dans le plan complexe P rapporté au repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$, unité graphique 2 cm, on considère les points A et B, d'affixes respectives $z_{\mathrm{A}} = -1$ et $z_{\mathrm{B}} = 3\mathrm{i}$.
Soit la fonction f de P privée du point A dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = \mathrm{i}\left(\dfrac{z-3\mathrm{i}}{z+1}\right)$ (1).

1. Soit C le point d'affixe $z_{\mathrm{C}} = 2 - \mathrm{i}$. Montrer qu'il existe un seul point D tel que $f(\mathrm{D}) = \mathrm{C}$.
2. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. À l'aide de l'égalité (1), montrer que, pour tout M distinct de A et de B :
   $\mathrm{O}M' = \mathrm{B}M$ et $\left(\vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = \dfrac{\pi}{2} + \left(\overrightarrow{M\mathrm{A}},\ \overrightarrow{M\mathrm{B}}\right)$ (modulo 2π).
4. En déduire et construire les ensembles de points suivants :
   a. L'ensemble E des points M tels que l'image M' soit située sur le cercle (F) de centre O, de rayon 1.
   b. L'ensemble F des points M tels que l'affixe de M' soit réelle.
5. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
   On note C_1 l'image de C par R.
   a. Déterminer l'affixe de C_1.
   b. Montrer que C_1 appartient à l'ensemble F.

53. Pondichéry juin 2001

On considère l'application f qui à tout nombre complexe z différent de 1, associe le nombre complexe

$$f(z) = \frac{2 - \mathrm{i}z}{1 - z}.$$

L'exercice étudie quelques propriétés de f.

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$d'unité graphique 2 cm, dans lequel seront représentés les ensembles trouvés aux questions **1.** et **2.**.

A est le point d'affixe 1 et B celui d'affixe $-2\mathrm{i}$.

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.
   Écrire $f(z)$ sous forme algébrique. En déduire l'ensemble des points M d'affixe z tels que $f(z)$ soit un réel et représenter cet ensemble.
2. On pose $z' = f(z)$.
   - **a.** Vérifier que i n'a pas d'antécédent par f et exprimer, pour z' différent de i, z en fonction de z'.
   - **b.** M est le point d'affixe z (z différent de 1) et M' celui d'affixe z' (z' différent de i).
     Montrer que $\mathrm{O}M = \frac{M'\mathrm{C}}{M'\mathrm{D}}$ où C et D sontles points d'affixes respectives 2 et i.
   - **c.** Montrer que, lorsque le point M décrit le cercle de centre O et de rayon 1 privé du point A, son image M' appartient à une droite fixe que l'on définira géométriquement.
   - **d.** Montrer que, si M est un point de l'axe des réels, différent de O et de A, alors M' appartient à la droite (CD).

54. Amérique du Sud novembre 2000

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$(unité graphique : 2 cm).

1. **a.** Donner l'écriture algébrique du nombre complexe de module 2 et dont un argument est $\dfrac{\pi}{2}$.

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $\mathrm{i}z - 2 = 4\mathrm{i} - z$. On donnera la solution sous forme algébrique.

2. On désigne par I, A et B les points d'affixes respectives 1, 2i et 3 + i.

a. Faire une figure que l'on complétera au cours de l'exercice.

b. Calculer l'affixe z_C du point C image de A par la symétrie de centre I.

c. Écrire sous forme algébrique le nombre complexe $\dfrac{z_\mathrm{C} - z_\mathrm{B}}{z_\mathrm{A} - z_\mathrm{B}}$.
En déduire le module et un argument de ce nombre. (z_A et z_B désignent les affixes des points A et B).

d. Soit D le point d'affixe z_D tel que $z_\mathrm{D} - z_\mathrm{C} = z_\mathrm{A} - z_\mathrm{B}$.
Montrer que ABCD est un carré.

3. Pour tout point M du plan, on considère le vecteur $\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}} + \overrightarrow{M\mathrm{D}}$.

a. Exprimer le vecteur $\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}} + \overrightarrow{M\mathrm{D}}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{M\mathrm{I}}$.

b. Montrer que le point K défini par $\overrightarrow{K\mathrm{A}} + \overrightarrow{K\mathrm{B}} + \overrightarrow{K\mathrm{C}} + \overrightarrow{K\mathrm{D}} = 2\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est le milieu du segment [AD].

c. Déterminer l'ensemble Γ des points M du plan tels que

$$\left\|\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}} + \overrightarrow{M\mathrm{D}}\right\| = \left\|2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\|.$$

Construire Γ.

55. Nouvelle–Calédonie décembre 2000

1. **a.** Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation

$$z^2 - 2z + 2 = 0.$$

Préciser le module et un argument de chacune des solutions.

b. En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation

$$(-\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 3)^2 - 2(-\mathrm{i}z + 3\mathrm{i} + 3) + 2 = 0.$$

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ d'unité graphique 2cm. On considère les points A, B et C d'affixes respectives
$z_{\mathrm{A}} = 1 + \mathrm{i},\ z_{\mathrm{B}} = \overline{z_{\mathrm{A}}},\ z_{\mathrm{C}} = 2z_{\mathrm{B}}$.

a. Déterminer les formes algébriques de z_{B} et z_{C}.

b. Placer lespoints A, B et C.

c. Montrer que les points A, B et C appartiennent au cercle $(\mathscr{C})$ de centre I d'affixe 3 et de rayon $\sqrt{5}$.

d. Calculer $\dfrac{z_{\mathrm{C}} - 3}{z_{\mathrm{A}} - 3}$; en déduire la nature du triangle IAC.

e. Le point E est l'image du point O par la translation de vecteur $2\overrightarrow{\mathrm{IC}}$. Déterminer l'affixe du point E.

f. Le point D est l'image du point E par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$.
Déterminer l'affixe du point D.

g. Démontrer que les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

56. Antilles–Guyane septembre 2000

1. Pour tout nombre complexe z, on considère

$$f(z) = z^4 - 10z^3 + 38z^2 - 90z + 261.$$

a. Soit b un nombre réel. Exprimer en fonction de b les parties réelle et imaginaire de $f(\mathrm{i}b)$. En déduire que l'équation $f(z) = 0$ admet deux nombres imaginaires purs comme solution.

b. Montrer qu'il existe deux nombres réels α et β, que l'on déterminera, tels que, pour tout nombre complexe z,

$$f(z) = \left(z^2 + 9\right)\left(z^2 + \alpha z + \beta\right).$$

c. Résoudre dans l'ensemble des nombres complexes l'équation $f(z) = 0$.

2. Le plan complexe $\mathscr{P}$ est rapporté à un repère orthonormal.

a. Placer dans le plan $\mathscr{P}$ les points A, B, C et D ayant respectivement pour affixes : $a = 3\mathrm{i}$, $b = -3\mathrm{i}$, $c = 5 + 2\mathrm{i}$ et $d = 5 - 2\mathrm{i}$.

b. Déterminer l'affixe de l'isobarycentre G des points A, B, C, D.

c. Déterminer l'ensemble E des points M de $\mathscr{P}$ tels que :

$$\|\overrightarrow{M\mathrm{A}} + \overrightarrow{M\mathrm{B}} + \overrightarrow{M\mathrm{C}} + \overrightarrow{M\mathrm{D}}\| = 10.$$

Tracer E sur la figure précédente.

57. Amérique du Nord juin 2000

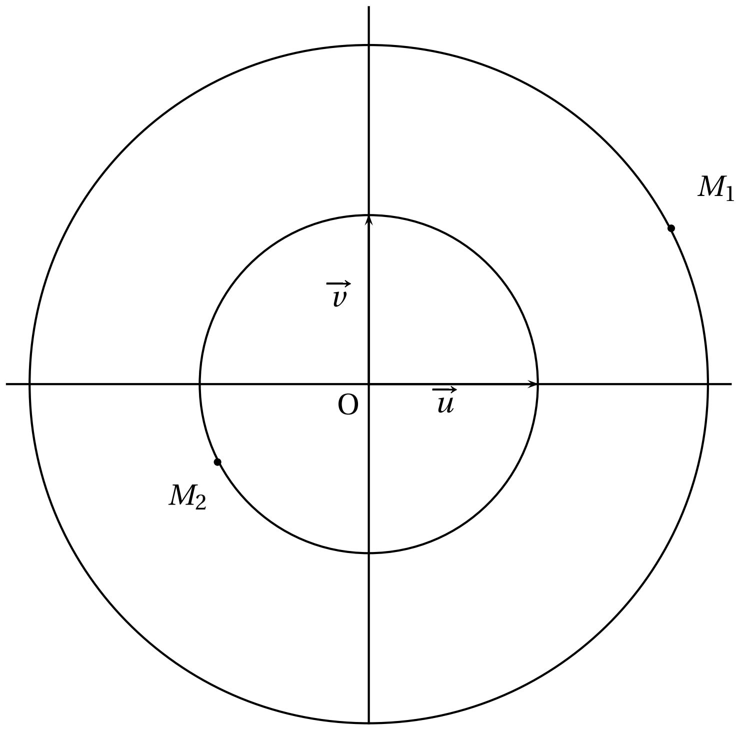
Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Dans tout l'exercice, z est un nombre complexe non nul.

À tout point M d'affixe z, on associe le point M' d'affixe $z' = -\dfrac{1}{z}$, puis le point I milieu du segment $[MM']$. L'affixe de I est donc $\dfrac{1}{2}\left(z - \dfrac{1}{z}\right)$.

Note : les questions **2., 3.** et **4.** sont largement indépendantes.

1. **a.** Donner une relation entre les modules de z et z'.
Donner une relation entre leurs arguments.

b. Sur la figure ci-dessous est placé le point M_1 d'affixe z_1 sur le cercle de centre O et de rayon 2.
Expliquer comment on peut obtenir géométriquement le point M'_1, puis le point I_1 milieu du segment $[M_1M'_1]$. Effectuer cette construction.



2. Pour cette question, θ est un réel et M est le point d'affixe $z = e^{\mathrm{i}\theta}$.

a. Calculer sous forme algébrique l'affixe de I.

b. Sur la figure ci-dessous est placé le point M_2 d'affixe z_2 sur le cercle $\mathscr{C}$, de centre O et de rayon 1. Expliquer comment, en utilisant le résultat de la question **2. a.**, on peut obtenir géométriquement le point I_2 milieu du segment $[M_2M'_2]$.
Effectuer cette construction.

Donner (sans justification) l'ensemble décrit par I lorsque M décrit $\mathscr{C}$.

3. Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O.
   a. Déterminer les points M du plan complexe pour lesquels M et I sont confondus.
   b. Développer $(z-2\text{i})^2+3$.
   Déterminer les points M du plan complexe pour lesquels l'affixe de I est 2i.
4. Dans cette question, M est un point du plan, distinct de O, d'affixe $z = x+\text{i}y$ (x et y réels).
   a. Exprimer en fonction de x et y la partie réelle et la partie imaginaire de l'affixe de I.
   b. Déterminer l'ensemble A des points M du plan pour lesquels I appartient à l'axe des abscisses.
   c. Déterminer l'ensemble B des points M du plan pour lesquels I appartient à l'axe des ordonnées.

58. Antilles–Guyane juin 2000

1. Pour tout nombre complexe z, on pose $P(z) = z^3 - 3z^2 + 3z + 7$.

a. Calculer $P(-1)$.

b. Déterminer les réels a et b tels que pour tout nombre complexe z, on ait :

$$P(z) = (z+1)(z^2 + az + b).$$

c. Résoudre dans C l'équation $P(z) = 0$.

2. Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\ \vec{u},\ \vec{v})$. (Unité graphique : 2 cm.) On désigne par $A,\ B,\ C$ et G les points du plan d'affixes respectives

$$z_{\text{A}} = -1,\ z_{\text{B}} = 2 + \text{i}\sqrt{3},\ z_{\text{C}} = 2 - \text{i}\sqrt{3} \quad \text{et} \quad z_{\text{G}} = 3.$$

a. Réaliser une figure et placer les points A, B, C et G.

b. Calculer les distances AB, BC et AC. En déduire la nature du triangle ABC.

c. Calculer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_{\text{A}} - z_{\text{C}}}{z_{\text{G}} - z_{\text{C}}}$. En déduire la nature du triangle GAC.

3. Soit (D) l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left(-\overrightarrow{M\text{A}} + 2\overrightarrow{M\text{B}} + 2\overrightarrow{M\text{C}}\right) \cdot \overrightarrow{\text{CG}} = +12 \quad (1)$$

a. Montrer que G est le barycentre du système de points pondérés

$$\{(\text{A},\ -1)\ ;\ (\text{B},\ 2)\ ;\ (\text{C},\ 2)\}.$$

b. Montrer que la relation (1) est équivalente à la relation $\overrightarrow{\text{G}M}.\overrightarrow{\text{CG}} = -4 \quad (2)$.

c. Vérifier que le point A appartient à l'ensemble (D).

d. Montrer que la relation (2) est équivalente à la relation $\overrightarrow{\text{A}M}.\overrightarrow{\text{GC}} = 0$.

e. En déduire l'ensemble (D) et le tracer.

59. Asie juin 2000

Dans le plan complexe (P) muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{\imath}, \overrightarrow{\jmath}\right)$, d'unité 2 cm, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives :

$$z_{\text{A}} = -\text{i}\ ;\ z_{\text{B}} = 3\ ;\ z_{\text{C}} = 2 + 3\text{i} \quad \text{et} \quad z_{\text{D}} = -1 + 2\text{i}.$$

1. Placer sur une figure les points A, B, C et D.

2. **a.** Interpréter géométriquement le module et l'argument du complexe $\dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{D}} - z_{\text{B}}}$.

b. Calculer le complexe $\dfrac{z_{\text{C}} - z_{\text{A}}}{z_{\text{D}} - z_{\text{B}}}$.

c. Que pouvez-vous conclure concernant les segments [AC] et [BD] ?

3. **a.** Quelle est la nature du quadrilatère ABCD ? Justifier.

b. Calculer l'aire s_0 du quadrilatère ABCD.

4. **a.** Placer sur la figure précédente les points A_1, B_1, C_1 et D_1 tels que $\overrightarrow{\text{DA}_1} = \overrightarrow{\text{A}_1\text{B}_1} = \overrightarrow{\text{B}_1\text{C}}$, où les points A_1 et B_1 appartiennent à [DC], le quadrilatère $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1$ étant un carré situé àl'extérieur du quadrilatère ABCD.

b. Tracer le carré $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1$ et déterminer son aire s_1.

5. **a.** On continue par le même procédé : un carré $\text{A}_n\text{B}_n\text{C}_n\text{D}_n$ étant déterminé, on considère les points A_{n+1}, B_{n+1}, C_{n+1} et D_{n+1} tels que $\overrightarrow{\text{D}_n\text{A}_{n+1}} = \overrightarrow{\text{A}_{n+1}\text{B}_{n+1}} = \overrightarrow{\text{B}_{n+1}\text{C}_n}$ où les points A_{n+1} et B_{n+1} appartiennent à $[\text{D}_n\text{C}_n]$, le quadrilatère $\text{A}_{n+1}\text{B}_{n+1}\text{C}_{n+1}\text{D}_{n+1}$ étant un carré situé à l'extérieur du carré $\text{A}_n\text{B}_n\text{C}_n\text{D}_n$.
Tracer le carré $\text{A}_2\text{B}_2\text{C}_2\text{D}_2$.

b. Soit s_n l'aire du carré $\text{A}_n\text{B}_n\text{C}_n\text{D}_n$.
Exprimer s_{n+1} en fonction de s_n, puis de n.
En déduire s_n , en fonction de n.

c. Déterminer, en fonction de n, l'aire S_n de la figure obtenue par la juxtaposition du quadrilatère ABCD et des carrés $\text{A}_1\text{B}_1\text{C}_1\text{D}_1$, $\text{A}_2\text{B}_2\text{C}_2\text{D}_2$, … et $\text{A}_n\text{B}_n\text{C}_n\text{D}_n$.

d. La suite (s_n) est-elle convergente ? Préciser sa limite si elle existe.

60. France juin 2000

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$, unité graphique 4 cm, on considère les points A d'affixe $z_\text{A} = 1$ et B d'affixe $z_\text{B} = 2$.
Soit un réel θ appartenant à l'intervalle $]0 ; \pi[$.
On note M le point d'affixe $z = 1 + \text{e}^{2\text{i}\theta}$.

1. Montrer que le point M appartient au cercle $(\mathscr{C})$ de centre A et de rayon 1.

2. Exprimer l'angle $(\overrightarrow{\text{AB}} ; \overrightarrow{\text{A}M})$ en fonction de θ.
En déduire l'ensemble E des points M quand θ décrit l'intervalle $]0 ; \pi[$.

3. On appelle M' l'image de M par la rotation de centre O et d'angle $-\theta$ et on note z' l'affixe de M'. Montrer que $z' = \overline{z}$ puis que M' appartient à $(\mathscr{C})$.

4. Dans toute la suite, on choisit $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.
On appelle r la rotation de centre O et d'angle $-\dfrac{2\pi}{3}$ et A′ l'image de A par r.

- **a.** Définir l'image $(\mathscr{C}')$ du cercle $(\mathscr{C})$ par r.
Placer sur une figure A, B, $(\mathscr{C})$, M, $(\mathscr{C}')$ puis le point M' image de M par r.
- **b.** Montrer que le triangle AMO est équilatéral.
- **c.** Montrer que $(\mathscr{C})$ et $(\mathscr{C}')$ se coupent en O et en M.
- **d.** Soit le point P symétrique de M par rapport à A. Montrer que M' est le milieu de $[\text{A}'P]$.

61. La Réunion juin 2000

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O,\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$(unité : 2 cm). On dit qu'un triangle équilatéral ABC est direct si et seulement si $\left(\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{AC}\right) = \dfrac{\pi}{3}\ [2\pi]$. On pose $j = e^{2i\frac{\pi}{3}}$.

1. **a.** Vérifier que 1 , j et j^2 sont solutions de l'équation $z^3 = 1$.

   b. Calculer $(1-j)(1+j+j^2)$; en déduire que $1+j+j^2 = 0$.

   c. Vérifier que $e^{i\frac{\pi}{3}} + j^2 = 0$.

2. Dans le plan complexe, on considère trois points A, B, C, deux à deux distincts, d'affixes respectives a, b, c.

   a. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si $\dfrac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}}$.

   b. En utilisant les résultats des questions précédentes, montrer que le triangle ABC est équilatéral direct si et seulement si : $a + bj + cj^2 = 0$.

3. À tout nombre complexe $z \neq 1$, on associe les points R, M et M' d'affixes respectives 1, z et $\bar{z}$.

   a. Pour quelles valeurs de z les points M et M' sont-ils distincts ?

   b. En supposant que la condition précédente est réalisée, montrer que l'ensemble (Δ) des points M d'affixe z tels que le triangle RMM' soit équilatéral direct est une droite privée d'un point.

62. Liban juin 2000

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On considère les points A et B d'affixes respectives i et $-$ i.
Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z distincte de $-$ i associe le point M' d'affixe z' telle que

$$z' = \frac{1 + \mathrm{i}z}{z + \mathrm{i}}.$$

1. Quelle est l'image par l'application f du point O ?

2. Quel est le point qui a pour image par l'application f le point C d'affixe $1 + i$?

3. Montrer que l'équation $\dfrac{1 + \mathrm{i}iz}{z + \mathrm{i}} = z$ admet deux solutions que l'on déterminera.

4. Vérifier que $z' = \dfrac{\mathrm{i}(z - \mathrm{i}i)}{z + \mathrm{i}}$, en déduire $\mathrm{O}M' = \dfrac{\mathrm{A}M}{\mathrm{B}M}$ et :

$$\left(\vec{u}, \overrightarrow{\mathrm{O}M'}\right) = \left(\overrightarrow{M\mathrm{B}}, \overrightarrow{M\mathrm{A}}\right) + \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}.$$

5. Montrer que tous les points de l'axe des abscisses ont leurs images par l'application f situées sur un même cercle $(\mathscr{C})$ que l'on précisera.

6. Soit M un point du cercle de diamètre [AB] différent de A et de B, montrer que son image M' est située sur l'axe des abscisses.

63. Polynésie juin 2000

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, unité graphique 4 cm. Dans l'ensemble des nombres complexes $\mathbb{C}$, i désigne le nombre de module 1, et d'argument $\dfrac{\pi}{2}$.
On appelle f l'application, qui, à tout nombre complexe z différent de -2, associe

$$Z = f(z) = \frac{z-2+\text{i}}{z+2\text{i}}.$$

1. Si $z = x + \text{i}y$, x et y étant deux réels, exprimer la partie réelle et la partie imaginaire de Z en fonction de x et de y.
On vérifiera que $\Re(Z) = \dfrac{x^2+y^2-2x+3y+2}{x^2+(y+2)^2}$.
En déduire la nature de :

- **a.** l'ensemble E des points M d'affixe z, tels que Z soit un réel ;
- **b.** l'ensemble F des points M d'affixe z du plan, tels que Z soit un imaginaire pur éventuellement nul.
- **c.** Représenter ces deux ensembles.

2. On appelle A et B les points d'affixes respectives $z_A = 2 - \text{i}$ et $z_B = -2\text{i}$.
En remarquant que $Z = \dfrac{z - z_A}{z - z_B}$, retrouver les ensembles E et F par une méthode géométrique.

3. Calculer $|f(z) - 1| \times |z + 2\text{i}|$, et en déduire que les points M' d'affixe Z, lorsque le point M d'affixe z parcourt le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{5}$, sont tous sur un même cercle dont on précisera le rayon et l'affixe du centre.

64. Pondichéry juin 2000

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$; unité graphique 4 cm.
On appelle B le point d'affixe i et M_1 le point d'affixe :

$$z_1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}(1-\mathrm{i}).$$

1. Déterminer le module et un argument de z_1.
2. Soit M_2 le point d'affixe z_2, image de M_1 par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.
   Déterminer le module et un argument de z_2.
   Montrer que le point M_2 est un point de la droite (D) d'équation $y = x$.
3. Soit M_3 le point d'affixe z_3, image de M_2 par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}+2$.
   a. Montrer que $z_3 = \frac{\sqrt{3}+1}{2}(1+i)$.
   b. Montrer que les points M_1 et M_3 sont situés sur le cercle de centre B et de rayon $\sqrt{2}$.
4. Construire, à la règle et au compas, les points M_1, M_2 et M_3 en utilisant les questions précédentes ; on précisera les différentes étapes de la construction.
5. À tout point M du plan d'affixe z (distinct de B), on associe le point M', d'affixe Z telle que $Z = \frac{1}{\mathrm{i}-z}$.
   Déterminer et construire l'ensemble (E) des points M du plan (M distinct de B) tels que M' appartienne au cercle de centre O et de rayon 1.

65. France septembre 1999

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $\left(O,\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm). On note Z_M l'affixe d'un point M.
Soit A le point d'affixe 4 et B le point d'affixe 4i.

1. Soit θ un réel de $[0,\ 2\pi[$ et r un réel strictement positif.
On considère le point E d'affixe $re^{i\theta}$ et F le point tel que OEF est un triangle rectangle isocèle vérifiant $\left(\overrightarrow{OE},\ \overrightarrow{OF}\right) = \dfrac{\pi}{2}$.
Quelle est, en fonction de r et θ, l'affixe de F ?

2. Faire une figure et la compléter au fur et à mesure de l'exercice. On choisira, uniquement pour cette figure :

$$\theta = 5\frac{\pi}{6} \text{ et } r = 3.$$

3. On appelle P, Q, R, S les milieux respectifs des segments [AB], [BE], [EF], [FA].

a. Prouver que PQRS est un parallélogramme.

b. On pose : $Z = \dfrac{Z_R - Z_Q}{Z_Q - Z_P}$.
Déterminer le module et un argument de Z. En déduire que PQRS est un carré.

4. **a.** Calculer, en fonction de r et θ, les affixes respectives des points P et Q.

b. Quelle est, en fonction de r et θ, l'aire du carré PQRS ?

c. r étant fixé, pour quelle valeur de θ cette aire est-elle maximale ? Quelle est alors l'affixe de E ?

66. Nouvelle–Calédonie décembre 1999

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$; unité graphique : 2 cm.

1. Tracer les cercles de centre O et de rayons 1 et 2. Placer les points A, B, et D d'affixes respectives $\sqrt{3} + \text{i}$, $\sqrt{3} - \text{i}$ et $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\text{i}$.

2. On considère la rotation R de centre O et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et la translation T de vecteur d'affixe 1.

  a. Déterminer les affixes $z_{\text{A}'}$ et $z_{\text{B}'}$ des points A′ et B′, images respectives des points A et B par la rotation R.

  b. Déterminer l'affixe $z_{\text{D}'}$, du point D′, image du point D par la translation T.

  c. Placer les points A′, B′ et D′.

3. Déterminer un argument du nombre complexe $\dfrac{z_{\text{A}'} - z_{\text{B}'}}{z_{\text{D}'}}$.
Justifier que la droite (OD′) est une médiatrice du triangle OA′B′.

67. Sportifs de haut-niveau septembre 1999

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$. On désigne par E l'ensemble des points M d'affixe z tels que z^3 soit un nombre réel positif ou nul.

1. **a.** Le point A d'affixe $a = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}}$ appartient-il à E ?

   b. On note B le point d'affixe $b = -1 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Calculer un argument de b et montrer que B appartient à E.

2. On suppose $z \neq 0$ et on note θ un argument de z. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur θ pour que z^3 soit un nombre réel positif.

3. Après avoir vérifié que le point O appartient à E, déduire des résultats précédents que E est la réunion de trois demi-droites que l'on déterminera. Placer les points A et B et représenter E sur une figure.

4. À tout point P d'affixe $z \neq 0$, on associe les points Q d'affixe iz et R d'affixe z^4.
   On note F l'ensemble des points P tels que l'angle $(\overrightarrow{\mathrm{O}Q}, \overrightarrow{\mathrm{O}R})$ ait pour mesure $-\dfrac{\pi}{2}$.
   Montrer que F est l'ensemble E privé du point O.

68. Amérique du Nord juin 1999

Le plan orienté est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, l'unité graphique étant 4 cm. On considère les points A_0, A_1 d'affixes respectives : $a_0 = 1$; $a_1 = \text{e}^{\frac{i\pi}{12}}$.
Le point A_2 est l'image du point A_1 par la rotation r de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{12}$.

1. **a.** Calculer l'affixe a_2 du point A_2 sous forme exponentielle puis sous forme algébrique.

   b. Soit I le milieu du segment $[\text{A}_0\text{A}_2]$. Calculer l' affixe du point I.

   c. Faire une figure.

2. **a.** Prouver que les droites (OI) et (OA_1) sont confondues.

   b. Écrire sous forme trigonométrique l'affixe de I.

   c. Déterminer $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ (les valeurs exactes sont exigées), sachant que $\sqrt{4\sqrt{3}+8} = \sqrt{6}+\sqrt{2}$.

69. Antilles–Guyane juin 1999

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.
On considère le point A d'affixe 1 et, pour tout θ appartenant à $[0\ ;\ 2\pi[$, le point M d'affixe $z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$. On désigne par P le point d'affixe $1+z$ et par Q le point d'affixe z^2.

1. À partir du point M, donner une construction géométrique du point P et une construction géométrique du point Q. Les points O, A, M, P et Q seront placés sur une même figure.
2. Déterminer l'ensemble des points E pour θ appartenant à $[0\ ;\ 2\pi[$.
   Tracer cet ensemble sur la figure précédente.
3. Soit S le point d'affixe $1+z+z^2$ où z désigne toujours l'affixe du point M. Construire S, en justifiant la construction.
4. Dans le cas où S est différent de O, tracer la droite (OS). Quelle conjecture apparaît, relativement au point M ?
   Démontrer que le nombre $\dfrac{1+z+z^2}{2}$ est réel, quel que soit θ appartenant à $[0\ ;\ 2\pi[$.
   Conclure sur la conjecture précédente.

70. Asie juin 1999

1. Pour tout nombre Z, on pose $P(Z) = Z^4 - 1$.

    a. Factoriser $P(Z)$.

    b. En déduire les solutions dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes de l'équation $P(Z) = 0$, d'inconnue Z.

    c. Déduire de la question précédente les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation d'inconnue z :

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1.$$

2. a. Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (l'unité graphique est 5 cm).
Placer les points A, B et C d'affixes respectives :

$$a = -2,\ b = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}\text{i et } c = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}\text{i}$$

    b. Démontrer que les points O, A, B et C sont situés sur un cercle, que l'on déterminera.

3. Placer le point D d'affixe $d = -\frac{1}{2}$.
Exprimer sous forme trigonométrique le nombre complexe z' défini par :

$$z' = \frac{a-c}{d-c}$$

En déduire le rapport $\frac{\text{CA}}{\text{CD}}$.
Quelle autre conséquence géométrique peut-on tirer de l'expression de z' ?

71. Centres étrangers juin 1999

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormal $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$, A, A′, B, B′ sont les points d'affixes respectives $1,\ -1,\ \text{i},\ -\text{i}$.
À tout point M d'affixe z, distinct des points O, A, A′, B et B′, on associe les points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2, tels que les triangles BMM_1 et AMM_2 soient rectangles et isocèles, avec

$$\left(\overrightarrow{M_1\text{B}}, \overrightarrow{M_1M}\right) = \left(\overrightarrow{M_2M}, \overrightarrow{M_2\text{A}}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Voir la figure sur l'annexe 1, *qui sera complétée et rendue avec la copie*

1. **a.** Justifier les égalités $z - z_1 = \text{i}(\text{i} - z_1)$ et $1 - z_2 = \text{i}(z - z_2)$.

   b. Vérifier que z_1 et z_2 peuvent s'écrire :

$$z_1 = \frac{1+\text{i}}{2}(z+1) \text{ et } z_2 = \frac{1-\text{i}}{2}(z+i).$$

2. On se propose dans cette question de déterminer les points M pour lesquels le triangle OM_1M_2 est équilatéral.

   a. Montrer que : OM_1 = OM_2 équivaut à $|z+1| = |z+\text{i}|$.
   En déduire l'ensemble (Δ) des points M tels que OM_1 = OM_2 et tracer (Δ) sur la figure.

   b. Montrer que : O$M_1 = M_1M_2$ équivaut $|z+1|^2 = 2|z|^2$.

   c. En déduire l'ensemble (Γ) des points M du plan pour lesquels O$M_1 = M_1M_2$.
   On pourra montrer que $|z+1|^2 = 2|z|^2$ équivaut à $|z-1|^2 = 2$.
   Tracer (Γ) sur la figure.

   d. En déduire les deux points M pour lesquels OM_1M_2 est un triangle équilatéral et les placer sur la figure.

72. France juin 1999

Le plan (P) est rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$. On prendra 4 cm comme unité sur les deux axes.
On considère l'application F du plan dans lui-même qui, à tout point m d'affixe z associe le point M d'affixe $\frac{1}{2}z^2 - z$.
L'objet de cet exercice est de tracer la courbe (Γ) décrite par M lorsque m décrit le cercle $(\mathscr{C})$ de centre O et de rayon 1.
Soit t un réel de $[-\pi\ ;\ \pi]$ et m le point de $(\mathscr{C})$ d'affixe $z = \text{e}^{\text{i}t}$.

1. Montrer que l'image M de m par F est le point de coordonnées :

$$\left\{\begin{array}{lcl} x(t) & = & \frac{1}{2}\cos 2t - \cos t \\ y(t) & = & \frac{1}{2}\sin 2t - \sin t \end{array}\right. ,\ t \in [-\pi\ ;\ \pi].$$

   Ces relations constituent une représentation paramétrique de la courbe (Γ).
2. Comparer $x(-t)$ et $x(t)$ d'une part, $y(-t)$ et $y(t)$ d'autre part.
   En déduire que (Γ) admet un axe de symétrie que l'on précisera.
3. Montrer que $x'(t) = \sin t(1 - 2\cos t)$. Étudier les variations de x sur $[0\ ;\ \pi]$.
4. Montrer que $y'(t) = (\cos t - 1)(1 + 2\cos t)$. Étudier les variations de y sur $[0\ ;\ \pi]$.
5. Dans un même tableau faire figurer les variations de x et y sur $[0\ ;\ \pi]$.
6. Placer les points de (Γ) correspondant aux valeurs 0, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$ et π du paramètre t et tracer les tangentes en ces points (on admettra que pour $t = 0$ la tangente à (Γ) est horizontale). Tracer la partie de (Γ) obtenue lorsque t décrit $[0\ ;\ \pi]$ puis tracer (Γ) complètement.

73. Liban juin 1999

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$, l'unité de longueur étant le centimètre, les points A, B, C, D ont pour affixe $3+\text{i}$, $7-i$, $-1-7\text{i}$, $8-4\text{i}$ respectivement.

1. **a.** Placer les points A, B, C, D.

   b. Quelle est la nature du triangle ABC ?

2. Démontrer que A, B, C, D sont sur un même cercle.
   On précisera le rayon de ce cercle et l'affixe de son centre I.

3. À tout point M d'affixe z, avec z non nul, on associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \dfrac{10}{z}$.

   a. Écrire, sous forme algébrique les affixes a', b', c' des points A$'$, B$'$, C$'$ (respectivement associés à A, B, C). Placer les points A$'$, B$'$, C$'$.

   b. Vérifier que : $\dfrac{c'-a'}{b'-a'} = 2$.

   c. En déduire une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{A'C'}\right)$.

   d. Que peut-on en déduire pour les points A$'$, B$'$, C$'$?

74. Polynésie juin 1999

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ d'unité graphique 2 cm.

1. Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation $(E)\ :\ z^3 - 8 = 0$.
2. On considère dans le plan (P) les points A, B et C d'affixes respectives :
$$z_{\text{A}} = -1 + \text{i}\sqrt{3}, \quad z_{\text{B}} = 2 \quad \text{et} \quad z_{\text{C}} = -1 - \text{i}\sqrt{3}.$$
   a. Écrire z_{A} et z_{C} sous la forme trigonométrique.
   b. Placer les points A, B et C.
   c. Déterminer la nature du triangle ABC.
3. On considère l'application f du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' telle que :
$$z' = \text{e}^{2i\frac{\pi}{3}}z.$$
   a. Caractériser géométriquement l'application f.
   b. Déterminer les images des points A et C par f.
   En déduire l'image de la droite (AC) par f.

75. Pondichéry mai 1999

Les questions 2 *et* 3 *sont indépendantes.*

1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $z^2 - 2z\sqrt{2} + 4 = 0$.
On désignera par z_1 la solution dont la partie imaginaire est positive et par z_2 l'autre solution.

2. **a.** Déterminer le module et un argument de chacun des nombres z_1 et z_2.

b. Déterminer le module et un argument du nombre complexe $\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)^2$

3. Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$(unité : 1 cm), on considère le point M_1 d'affixe $\sqrt{2}(1+\text{i})$, le point M_2 d'affixe $\sqrt{2}(1-\text{i})$ et le point A d'affixe $z_\text{A} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

a. Déterminer l'affixe du point M_3 image de M_2 par l'homothétie h de centre A et de rapport - 3.

b. Déterminer l'affixe du point M_4 image de M_2 par la rotation r de centre O et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

c. Placer dans le même repère les points A, M_1, M_2, M_3 et M_4.

d. Calculer $\dfrac{z_3 - z_1}{z_4 - z_1}$.

e. Soient I le milieu du segment $[\text{M}_3\text{M}_4]$ et M_5 le symétrique de M_1 par rapport à I. Montrer que les points M_1, M_3, M_5 et M_4 forment un carré.

76. Amérique du Sud novembre 1998

Le plan est rapporté au repère $\left(\text{O}, \vec{u}, \vec{v}\right)$orthonormal direct ; unité graphique 2 centimètres.

On complétera la figure au fur et à mesure de l'exercice.

Soit I le point d'affixe 2i.

On nomme f la transformation qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \text{i}z$.

1. **a.** Préciser la nature de f ainsi que ses éléments caractéristiques.

   b. Déterminer l'affixe du point A$'$, image par f du point A d'affixe $1 + \sqrt{2} + \text{i}$.

   c. Montrer que les points A, I et A$'$ sont alignés.

2. **a.** Montrer que l'ensemble (Γ) des points M du plan tels que M, I et M' sont alignés, est le cercle de centre Ω d'affixe $1 + \text{i}$ et de rayon $\sqrt{2}$.

   b. Vérifier que le point A appartient à (Γ).

   c. Déterminer l'ensemble (Γ') décrit par le point M' lorsque le point M décrit (Γ).

3. Soit B le point d'affixe 2 + 2i et B' l'image de B par f.

   a. Démontrer que les droites (AB) et (AB') sont perpendiculaires.

   b. Soit C le point d'intersection des droites (AB) et (A'B). Déterminer la nature du quadrilatère OACA$'$.

77. Antilles septembre 1998

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.
On placera sur une même figure, qui sera complétée au fur et à mesure, les points introduits dans le texte (unité graphique : 2 cm.)

1. **a.** Résoudre l'équation

$$(E) \quad : \quad z^2 - 2z\sqrt{3} + 4 = 0.$$

   b. On considère les nombres complexes $z_1 = \sqrt{3} + \mathrm{i}$ et $z_2 = \sqrt{3} - \mathrm{i}$ et on désigne par M et N les points d'affixes respectives z_1 et z_2. Déterminer le module et l'argument de z_1 et z_2 ; placer M et N sur la figure.

   c. Déterminer les affixes des points Q et P images respectives de M et N par la translation de vecteur $\overrightarrow{w} = -2\overrightarrow{u}$. Placer P et Q sur la figure.
   Montrer que MNPQ est un carré.

2. Soit R le symétrique de P par rapport à O, E l'image de P par la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, S l'image de E par l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{3}$.
   Placer ces points sur la figure.
   Calculer les affixes de R et de S. Montrer que S appartient au segment [MN].

3. On pose $\alpha = 2 - \sqrt{3}$.

   a. Montrer que $1 + \alpha^2 = 4\alpha$ et $1 - \alpha^2 = 2\alpha\sqrt{3}$.

   b. Exprimer les affixes Z de $\overrightarrow{PR}$ et Z' de $\overrightarrow{PS}$ en fonction de α.

   c. Montrer que $|Z| = |Z'|$ et que $\dfrac{Z}{Z'} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$.

   d. Déduire des questions précédentes la nature du triangle PRS.

78. France septembre 1998

1. On considère le polynôme P défini par :

$$P(z) = z^3 - 6z^2 + 12z - 16.$$

a. Calculer P(4).

b. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation : $P(z) = 0$.

2. Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ tel que : $\|\vec{u}\| = \|\vec{v}\| = 2$ cm.
Soient A,B, C les points d'affixes respectives :

$$a = 4 \qquad b = 1 + \text{i}\sqrt{3} \qquad c = 1 - \text{i}\sqrt{3}$$

a. Placer les points A, B, C sur une figure que l'on complètera tout au long de l'exercice.

b. Montrer que le triangle ABC est équilatéral.

3. Soit K le point d'affixe $k = -\sqrt{3} + \text{i}$
On appelle F l'image de K par la rotation de centre O et d'angle de mesure $\dfrac{\pi}{3}$ et G l'image de K par la translation de vecteur $\overrightarrow{\text{OB}}$.

a. Quelles sont les affixes respectives de F et de G ?

b. Montrer que les droites (OC) et (OF) sont perpendiculaires.

4. Soit H le quatrième sommet du parallélogramme COFH.

a. Montrer que le quadrilatère COFH est un carré.

b. Calculer l'affixe du point H.

c. Le triangle AGH est-il équilatéral ?

79. Polynésie septembre 1998

Le plan (P) est muni du repère orthonormal direct $\left(\text{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).

À tout point M du plan (P) est associé le nombre complexe z, affixe du point M.

1. a. Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes

$$z_1 = -1, \quad z_2 = \frac{1-\text{i}\sqrt{3}}{2}, \; z_3 = -1-\text{i}\sqrt{3}.$$

   b. Déterminer le module et un argument de chacun des cubes z_1^3, z_2^3, z_3^3 des complexes ci-dessus, puis la partie réelle et la partie imaginaire de z_1^3, de z_2^3 et de z_3^3.

2. a. Si $z = x + \text{i}y = \rho\text{e}^{\text{i}\theta}$ est un nombre complexe (avec , y et θ réels et ρ rel supérieur à zéro), déterminer la partie réelle et la partie imaginaire de z^3 en fonction de x et y, puis le module et un argument de z^3 en fonction de ρ et θ.

   b. Déterminer l'ensemble (E) des points M d'affixe z caractérisé par : z^3 est un nombre réel.

   c. Déterminer et tracer l'ensemble (E$'$) des points M d'affixe z, caractérisé par : z^3 est un nombre réel et $1 \leqslant z^3 \leqslant 8$.