Amérique du Nord Correction

1. Exercice 1

Question 1 : L'espérance mathématique du jeu est $\frac{4}{10}(60-30)+\frac{3}{10}(0-30)+\frac{3}{10}(20-30)=0$ donc le jeu est **C** : équitable.

Question 2 : Loi binomiale $n = 4$, $p=\frac{4}{10}$, $P(\text{au moins un oui})=1-P(0\text{ oui})=1-\left(\frac{3}{5}\right)^4=1-\frac{81}{625}=\frac{544}{625}$, donc réponse **B**.

Question 3 : Le joueur tire simultanément deux bulletins de l'urne : il y a $\binom{10}{2}=\frac{10\times 9}{2}=45$ tirages possibles ; la probabilité qu'il obtienne un tirage de deux bulletins de sortes différentes est égale à la probabilité de tirer *oui* et *non* ou *oui* et *blanc* ou *non* et *blanc*, soit $\frac{4\times 3+4\times 3+3\times 3}{45}=\frac{33}{45}=\frac{11}{15}$, réponse **C**.

2. Exercice 2 (non spécialistes)

5 points

A. 1. a. $z_B=1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2e^{i\frac{\pi}{3}}$; $z_C=2e^{-i\frac{\pi}{3}}$.

A. 2. Quadrilatère $OABC$: il s'agit d'un losange.

A. 3. Δ est la médiatrice de $[OA]$: $|z|=|z-2|\Leftrightarrow OM=AM$.

B. 1. a. $z(z-2)=-4\Leftrightarrow z^2-2z+4=0\Leftrightarrow (z-1)^2=-3\Leftrightarrow \begin{cases} z_1=1+i\sqrt{3}=z_B \\ z_2=1-i\sqrt{3}=z_C \end{cases}$.

B. 1. b. On a donc $B' = B$ et $C' = C$.

B. 1. c. G a pour affixe $\frac{1}{3}(0+z_A+z_B)=\frac{2+1+i\sqrt{3}}{3}=1+i\frac{\sqrt{3}}{3}$, donc G' a pour affixe

$$\frac{-4}{1+i\frac{\sqrt{3}}{3}-2}=\frac{-12}{-3+i\sqrt{3}}=\frac{-12\left(-3-i\sqrt{3}\right)}{9+3}=3+i\sqrt{3}.$$

B. 2. a. **Question de cours**

On utilise $|z|^2=z\bar{z}$ ainsi que les propriétés de $\bar{z}$.

* $|z_1\times z_2|^2=(z_1z_2)\overline{(z_1z_2)}=z_1z_2\bar{z}_1\bar{z}_2=z_1\bar{z}_1\times z_2\bar{z}_2=|z_1|^2\times|z_2|^2$;

* Comme $z\times\frac{1}{z}=1$, on a : $\left|z\times\frac{1}{z}\right|=1\Leftrightarrow|z|\times\left|\frac{1}{z}\right|=1\Leftrightarrow\left|\frac{1}{z}\right|=\frac{1}{|z|}$.

B. 2. b. $|z'-2|=\left|\frac{-4}{z-2}-2\right|=\left|\frac{-4-2z+4}{z-2}\right|=\frac{|-2z|}{|z-2|}=\frac{2|z|}{|z-2|}$.

B. 2. c. On a $|z|=|z-2|$ et $|z'-2|=\frac{2|z|}{|z-2|}$ donc $|z'-2|=\frac{2|z|}{|z|}=2$ donc M' appartient au cercle de centre A, de rayon 2.

3. Exercice 2 (spécialistes)

5 points

1. a. σ est évidemment une similitude directe de centre Ω, de rapport $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\dfrac{\pi}{4}$.

b. $\sigma : z \mapsto z'$ avec $z'-\omega=\dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}(z-\omega) \Leftrightarrow z'-2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(z-2) \Leftrightarrow z'=\left(\dfrac{1+i}{2}\right)(z-2)+2$ d'où en développant : $z'=\left(\dfrac{1+i}{2}\right)z+1-i$.

c. $z-z'=z-\dfrac{1+i}{2}z-1+i=\dfrac{1-i}{2}z-1+i$ et $i(2-z')=i\left(2-\dfrac{1+i}{2}z-1+i\right)=-\dfrac{i-1}{2}z+i-1$, c'est pareil.

2. a. **Question de cours** :

Si A est un point donné d'affixe a, alors l'image du point P d'affixe p par la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{\pi}{2}$ est le point Q d'affixe q telle que

$$\begin{cases} AQ=AP \\ \left(\overrightarrow{AP},\overrightarrow{AQ}\right)=\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{AQ}{AP}=\dfrac{|q-a|}{|p-a|}=\left|\dfrac{q-a}{p-a}\right|=1 \\ \arg\left(\dfrac{q-a}{p-a}\right)=\dfrac{\pi}{2}[2\pi] \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{q-a}{p-a}=1\times e^{i\frac{\pi}{2}}=i, \text{ et donc } q-a=i(p-a).$$

b. Comme on a $z-z'=i(2-z')$, ceci se traduit par : M est l'image de Ω par la rotation de centre M', d'angle $\dfrac{\pi}{2}$, soit $\Omega MM'$ est rectangle isocèle en M'.

3. a. Par récurrence : $a_0=2+i$; avec la relation donnée : $a_0=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^0 e^{i\frac{(0+2)\pi}{4}}+2=e^{i\frac{\pi}{2}}+2=2+i$; ça marche au rang 0. On suppose que ça roule au rang n ; au rang $n+1$ on a alors avec la formule :

$$a_{n+1}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}e^{i\frac{(n+3)\pi}{4}}+2$$

et d'un autre côté par le calcul :

$$a_{n+1}=\left(\frac{1+i}{2}\right)a_n+1-i=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}a_n+1-i=\frac{\sqrt{2}}{2}e^{i\frac{\pi}{4}}\left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n e^{i\frac{(n+2)\pi}{4}}+2\right]+1-i$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}e^{i\frac{(n+3)\pi}{4}}+\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}+1-i=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}e^{i\frac{(n+3)\pi}{4}}+\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)+1-i=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}e^{i\frac{(n+3)\pi}{4}}+2.$$

Ok !

b. $a_3=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^3 e^{i\frac{5\pi}{4}}+2=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}-i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)+2=\dfrac{7}{4}-i\dfrac{1}{4}$.

4. Il faut trouver n_0 tel que

$$\Omega A_{n_0}\le 0,01 \Leftrightarrow \left|a_{n_0}-2\right|\le 0,01 \Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n_0}\le 0,01 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}n_0\ln(2)\le \ln(0,01) \Leftrightarrow n_0\ge\frac{-2\ln(0,01)}{\ln 2}\approx 13,3$$

donc $n_0=14$.

4. Exercice 3

5 points

1. $g(x) = \ln x - \dfrac{2}{x}$.

x	0	$2{,}3$	x_0	$2{,}4$	$+\infty$
g	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

Limite en 0 : ln tend vers $-\infty$ de même que $-\dfrac{2}{x}$; limite en $+\infty$: ln tend vers $+\infty$, $-\dfrac{2}{x}$ tend vers 0.

$g'(x) = \dfrac{1}{x} + \dfrac{2}{x^2} > 0$ donc g est croissante ; comme elle est continue, elle s'annule une seule fois.

On a $g(2,3) \approx -0,04$ et $g(2,4) \approx 0,04$ donc $2,3 \le x_0 \le 2,4$.

2. a. $f(x_0) = \dfrac{5\ln x_0}{x_0} = 5\dfrac{2/x_0}{x_0} = \dfrac{10}{x_0^2}$ car $g(x_0) = 0 \Leftrightarrow \ln x_0 = \dfrac{2}{x_0}$.

b. On se rappelle que la dérivée de $\ln t$ est $\dfrac{1}{t}$ et qu'une primitive de $u'u^n$ est $\dfrac{1}{n+1}u^{n+1}$:

$$\int_1^a f(t)\,dt = 5\int_1^a \frac{\ln t}{t}\,dt = 5\int_1^a \frac{1}{t}\ln t\,dt = 5\left[\frac{1}{2}(\ln t)^2\right]_1^a = \frac{5}{2}(\ln a)^2 - \frac{5}{2}(\ln 1)^2 = \frac{5}{2}(\ln a)^2.$$

3. L'abscisse de P_0 est x_0 donc l'ordonnée de M_0 est $f(x_0) = \dfrac{10}{x_0^2}$. L'aire de D_1 est $\displaystyle\int_1^{x_0} f(t)\,dt = \frac{5}{2}(\ln x_0)^2 = \frac{5}{2}\left(\frac{4}{x_0^2}\right) = \frac{10}{x_0^2} = f(x_0)$, soit l'aire du domaine D_2.

Comme $2,3 \le x_0 \le 2,4$, $1,89 \ge \dfrac{10}{x_0^2} \ge 1,74\ldots$

5. Exercice 4

7 points

Partie A : étude d'une suite

1. a.

n	0	1	2	3	4	5	6	7
x_n	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1,0	1,2	1,4
y_n	0	0,8000	1,4720	1,8386	1,9625	1,9922	1,9984	1,9997

b. Voir ci-dessous

c. La suite (y_n) semble croissante et converger vers 2.

2. a. $p(x) = -0,2x^2 + x + 0,8$, $p'(x) = -0,4x + 1$ qui est positif lorsque $x < \dfrac{1}{0,4} = 2,5$. Donc p est croissante de $[0\,;2]$ vers $[p(0)\,;p(2)] = [0,8\,;2] \subset [0\,;2]$.

b. On a par récurrence $y_0 = 0 \in [0\,;2]$; par ailleurs si $y_n \in [0\,;2]$ alors $y_{n+1} = p(y_n) \in [0\,;2]$ avec ce qu'on a dit en 2. a.

c. $y_1 = 0,8 > y_0$; par récurrence on a alors $p(y_1) > p(y_0) \Leftrightarrow y_2 > y_1$, etc. En appliquant p autant de fois que nécessaire on a $y_{n+1} > y_n$ (notez que c'est uniquement le fait que $y_1 = 0,8 > y_0$ qui rend la suite croissante, si c'était le contraire, $y_1 < y_0$ alors la suite serait décroissante…).

d. La suite (y_n) est croissante et majorée par 2, elle converge ; sa limite est le point fixe de p dans $[0\,;2]$, à savoir 2.

Partie B: étude d'une fonction

1. $g(0) = 2\dfrac{e^{4\times 0}-1}{e^{4\times 0}+1} = 0$; $g'(x) = 2\dfrac{4e^{4x}(e^{4x}+1) - 4e^{4x}(e^{4x}-1)}{(e^{4x}+1)^2} = 16\dfrac{e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}$;

par ailleurs $4 - [g(x)]^2 = 4 - 4\dfrac{(e^{4x}-1)^2}{(e^{4x}+1)^2} = 4\dfrac{(e^{4x}+1)^2 - (e^{4x}-1)^2}{(e^{4x}+1)^2} = 4\dfrac{2e^{4x}\times 2}{(e^{4x}+1)^2} = 16\dfrac{e^{4x}}{(e^{4x}+1)^2}$.

La fonction g vérifie bien les conditions (1) et (2).

2. a. En $+\infty$ $g(x) = 2\dfrac{e^{4x}-1}{e^{4x}+1}$ se comporte comme ses termes les plus forts, soit $2\dfrac{e^{4x}}{e^{4x}} \to 2$; l'asymptote est donc $y = 2$. Il n'y a pas d'asymptote verticale car $e^{4x}+1 > 0$.

b. La dérivée a déjà été calculée au 1. ; elle est positive donc g est croissante.

3. La tangente à (C_g) à l'origine a pour équation $y = g'(0)(x-0) + g(0) = 4x$. Elle coupe Δ en $\left(\dfrac{1}{2}\,;2\right)$.