Métropole

Exercice 1 :

Partie A

1.

a.

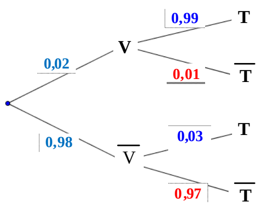
- Les données de l'énoncé permettent de donner directement :

  → $p(V)=0{,}02$;

  → $p_V(T)=0{,}99$;

  → $p_{\overline{V}}(\overline{T})=0{,}97$.

- Arbre pondéré :



b. $p(V\cap T)=p(V)\times p_V(T)=0{,}02\times 0{,}99=0{,}0198$.

2. On cherche donc $p(T)$; Or $T=(V\cap T)\cup(\overline{V}\cap T)$ (formule des probabilités totales) d'où :

$$p(T)=p\left((V\cap T)\cup(\overline{V}\cap T)\right)$$

$$=p(V\cap T)+p(\overline{V}\cap T)\text{ car ces 2 événements sont incompatibles}$$

$$=0{,}0198+p(\overline{V})\times p_{\overline{V}}(T)\text{ car il y a dépendance}$$

$$=0{,}0198+0{,}98\times 0{,}03=0{,}0198+0{,}0294=0{,}0492\text{ ; CQFD !}$$

3.

a. Probabilité que la personne soit contaminée si le test est positif : $p_T(V)$;

Or $p_T(V)=\dfrac{p(V\cap T)}{p(T)}=\dfrac{0{,}0198}{0{,}0492}\approx 0{,}402$ soit environ 40% de "chances".

b. On cherche donc $p_{\overline{T}}(\overline{V})$;

Or $p_{\overline{T}}(\overline{V})=\dfrac{p(\overline{T}\cap\overline{V})}{p(\overline{T})}=\dfrac{p(\overline{V})\times p_{\overline{V}}(\overline{T})}{1-p(T)}=\dfrac{0{,}98\times 0{,}97}{1-0{,}0492}=\dfrac{0{,}9506}{0{,}9508}\approx 0{,}9998$.

Partie B

1. A une personne choisie au hasard, on associe deux « issues » : soit la personne est contaminée (avec un probabilité p = p(V) = 0,02), soit elle ne l'est pas ; c'est donc une épreuve de Bernoulli ;
   On répète cette expérience 10 fois ; on a donc un « pseudo » schéma de Bernoulli (car a priori, une personne choisie ne peut l'être de nouveau).
   La variable aléatoire X compte le nombre de personne contaminées ;
   X suit donc sensiblement la loi binomiale de paramètres n = 10 et p = 0,02.

2. On cherche $p(X\geq 2)=1-p(X<2)=1-\left(p(X=0)+p(X=0)\right)$

$$=1-\left(\binom{10}{0}\times 0{,}02^0\times 0{,}98^{10}+\binom{10}{1}\times 0{,}02^1\times 0{,}98^9\right).$$

$$=1-\left(0{,}98^{10}+10\times 0{,}02\ \times 0{,}98^9\right)\approx 1-0{,}9838\approx 0{,}0162.$$

Exercice 2 :

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

On désigne par A, B, C, D les points d'affixes respectives z_A = 1, z_B = i, z_C = −1, z_D = −i.

1. $E=r_{A;\frac{\pi}{3}}(D)\Leftrightarrow z_e-z_A=e^{i\frac{\pi}{3}}(z_D-z_A)\Leftrightarrow z_E=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(z_D-z_A)+z_A$

$$\Leftrightarrow z_E=\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)(-i-1)+1=\left(-\frac{1}{2}i+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+1=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)-i\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)(1-i)\ :$$

☞ réponse 2.

2. $|z+i|=|z-1|\Leftrightarrow|z-z_D|=|z-z_A|\Leftrightarrow DM=AM$

   L'ensemble est donc la médiatrice du segment [AD] (qui est aussi celle du segment [BC] !).

   ☞ réponses 1. et 4.

3. $\dfrac{z+i}{z+1}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\dfrac{z-z_D}{z-z_C}\in i\mathbb{R}\Leftrightarrow\overline{CM}\perp\overline{DM}$ (et M ≠ C)

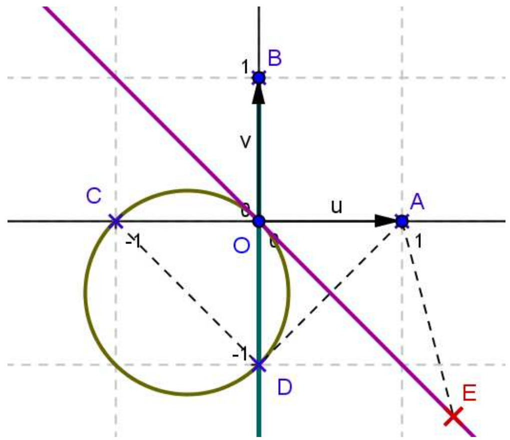
   L'ensemble est donc le cercle de diamètre [CD] privé du point C.

   ☞ réponse 2.

4. $\arg(z-i)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow\arg(z-z_B)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi\Leftrightarrow\left(\vec{u};\overrightarrow{BM}\right)=-\dfrac{\pi}{2}+2k\pi$

   L'ensemble est donc la demi droite]BD) d'origine B, passant par D et privée du point B (car sinon z – i = 0 et on ne peut pas considérer l'argument).

   ☞ réponse 3.

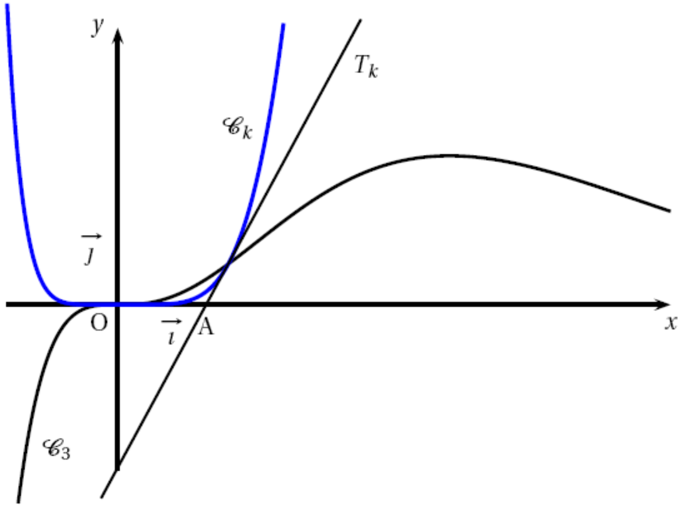


Exercice 3 :

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1, on désigne par f_n la fonction définie sur ℝ par : $f_n(x)=x^ne^{-x}$.

On note C_n sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O;\vec{i},\vec{j})$ du plan.

Partie A



Sur le graphique ci-dessus, on a représenté une courbe C_k où k est un entier naturel non nul, sa tangente T_k au point d'abscisse 1 et la courbe C_3. La droite T_k coupe l'axe des abscisses au point A de coordonnées (4/5 ; 0)

1. $f_1(x) = xe^{-x}$.

   a. Limites de f_1 :

   ▪ En $-\infty$: $\lim\limits_{x\to-\infty} x = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty$ (ou $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{e^x} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0^+$),

   donc, par produit, $\lim\limits_{x\to-\infty} f_1(x) = -\infty$.

   ▪ En $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{e^x} = 0$ (croissances comparées) donc, $\lim\limits_{x\to+\infty} f_1(x) = 0$.

   b. La fonction f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et pour tout réel x,

   $$f_1'(x) = 1\times e^{-x} + x\times\left(-e^{-x}\right) = (1-x)e^{-x}.$$

   c.

   → Signe de f_1' : $f_1'(x) > 0 \Leftrightarrow (1-x)e^{-x} > 0 \underset{e^{-x}>0}{\Leftrightarrow} 1-x > 0 \Leftrightarrow x < 1$;

   → Variations de f_1 : f_1 est donc croissante sur $]-\infty ; 1]$ et décroissante sur $[1 ; +\infty[$.

   La courbe C_k ne correspond donc pas à C_1 (variations non cohérentes) donc $k \neq 1$;

   Et comme $k \geq 1$, $k \geq 2$; CQFD !

2. $f_n(x) = x^n e^{-x}$

   a. Pour tout entier naturel n non nul,

   - $f_n(0) = 0 \Rightarrow O(0;0) \in C_n$, soit les courbes C_n passent toutes par O ;
   - $f_n(1) = e^{-1} = \dfrac{1}{e} \Rightarrow B\left(1;\dfrac{1}{e}\right) \in C_n$, soit les courbes C_n passent toutes par $B\left(1;\dfrac{1}{e}\right)$.

   b. Pour tout entier naturel n non nul f_n est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables et pour tout réel x : $f_n'(x) = nx^{n-1}e^{-x} + x^n\left(-e^{-x}\right) = x^{n-1}e^{-x}(n-x) = x^{n-1}(n-x)e^{-x}$; CQFD !

3. Pour tout réel x on a : $f_3'(x) = x^2(3-x)e^{-x}$, et $f_3'(x) > 0 \Leftrightarrow x^2(3-x)e^{-x} > 0 \underset{x^2e^{-x}\geq 0}{\Leftrightarrow} 3-x > 0 \Leftrightarrow x < 3$;

   f_3 est donc croissante sur $]-\infty ; 3]$ et décroissante sur $[3 ; +\infty[$; elle admet donc bien un maximum en 3.

4.

   a. L'équation de T_k est : $y = f_k'(1)(x-1) + f_k(1) = 0$;

   Or $f_k(1) = \dfrac{1}{e}$ et $f_k'(1) = (k-1)e^{-1} = \dfrac{k-1}{e}$ d'où $T_k : y = \dfrac{k-1}{e}(x-1) + \dfrac{1}{e} = \dfrac{k-1}{e}x + \dfrac{-k+2}{e}$;

   La droite T_k coupe donc l'axe des abscisses lorsque :

   $$y = 0 \Leftrightarrow \frac{k-1}{e}x + \frac{-k+2}{e} = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{-k+2/\cancel{e}}{k-1/\cancel{e}} = \frac{k-2}{k-1} ;$$

   Donc T_k coupe bien l'axe des abscisses au point de coordonnées : $\left(\dfrac{k-2}{k-1};0\right)$.

   b. On déduit de ce qui précède et des données de l'énoncé que :

   $$\left(\frac{k-2}{k-1};0\right) = \left(\frac{4}{5};0\right) \Leftrightarrow \frac{k-2}{k-1} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 5(k-2) = 4(k-1) \Leftrightarrow k = 6.$$

Partie B

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx = \int_0^1 f_n(x)\,dx,\ n \geq 1.$$

1. Calcul de $I_1 = \int_0^1 xe^{-x}\,dx$ à l'aide d'une intégration par parties

   Posons $\begin{cases} u'(x) = e^{-x} \\ v(x) = x \end{cases}$ et $\begin{cases} u(x) = -e^{-x} \\ v'(x) = 1 \end{cases}$; Alors grâce à la formule d'intégration par parties , il vient :

   $$I_1 = \int_0^1 xe^{-x}\,dx = \int_0^1 u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_0^1 - \int_0^1 u(x)v'(x)\,dx$$

   $$= \left[-xe^{-x}\right]_0^1 - \int_0^1\left(-e^{-x}\right)\times 1\,dx = \left[\left(-e^{-1}\right)-0\right] - \left[e^{-x}\right]_0^1 = -\frac{1}{e} - \left[\left(e^{-1}\right)-1\right] = 1 - \frac{2}{e}.$$

2.

   a. Pour tout entier naturel non nul n, f_n est positive sur $[0 ; 1]$. On peut donc interpréter géométriquement I_n comme l'aire délimitée par la courbe C_n, l'axe des abscisses et les droites d'équations x = 0 et x = 1.
   Les représentations graphiques données permettent alors de conjecturer le fait que la suite (I_n) semble décroissante.

   b. Soit n un entier naturel non nul ;

   $$I_{n+1} - I_n = \int_0^1 x^{n+1}e^{-x}\,dx - \int_0^1 x^n e^{-x}\,dx \underset{\text{par linéarité}}{=} \int_0^1 x^{n+1}e^{-x} - x^n e^{-x}\,dx = \int_0^1 (x-1)x^n e^{-x}\,dx ;$$

   Or, sur l'intervalle $[0 ; 1]$, $(x-1)x^n e^{-x} \leq 0$ donc, par "négativité" de l'intégrale, on en déduit que $\int_0^1 (x-1)x^n e^{-x}\,dx \leq 0 \Leftrightarrow I_{n+1} - I_n \leq 0 I_{n+1} \leq I_n$, ce qui démontre le fait que la suite (I_n) est décroissante.

c. Pour tout entier naturel n non nul et tout réel x de [0 ; 1], $f_n(x) \geq 0$, donc par positivité de l'intégrale, pour tout entier naturel n non nul $I_n \geq 0$.

La suite (I_n) est décroissante et minorée (par 0) : elle est donc convergente.

d. La fonction exponentielle étant croissante sur [0 ; 1], pour tout entier naturel n non nul, et

Pour tout réel x de [0 ; 1], il vient successivement :

$$0 \leq x \leq 1$$

$$-1 \leq -x \leq 0$$

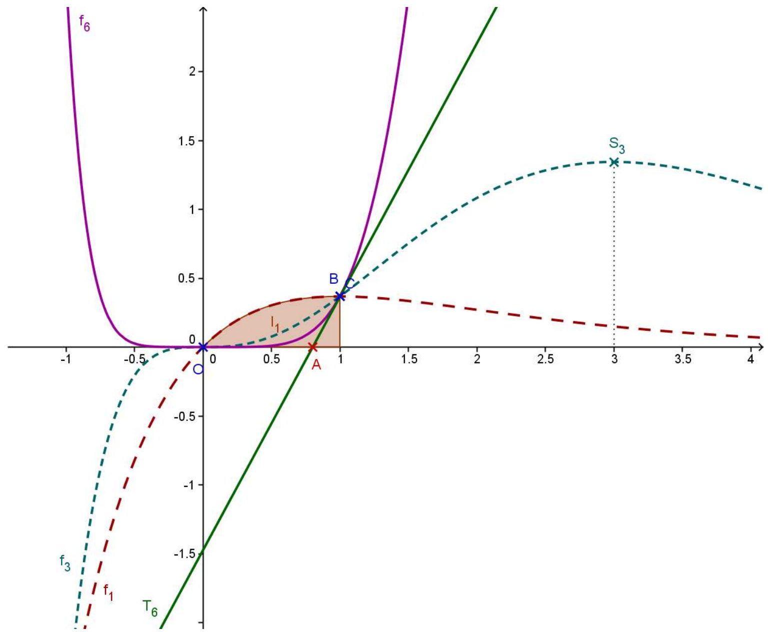
$$e^{-1} \leq e^{-x} \leq e^{0} \text{ car } x \mapsto e^{x} \text{ croissante sur } \mathbb{R}$$

$$x^n e^{-1} \leq x^n e^{-x} \leq x^n \text{ car } x^n \geq 0 \text{ croissante sur } [0\ ;\ 1]$$

Donc par passage à l'intégrale dans la 2ième inégalité, il vient :

$$I_n = \int_0^1 x^n e^{-x}\, dx \leq \int_0^1 x^n\, dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}\ ;$$

Ainsi, $0 \leq I_n \leq \dfrac{1}{n+1}$; Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} 0 = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n+1} = 0$, le théorème des gendarmes donne : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n = 0$.



Exercice 4 : non spécialistes

Partie A

H étant le projeté orthogonal de M sur le plan, les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{M_0H}$ sont colinéaires donc :

1. La formule $\vec{u}.\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos\left(\widehat{\vec{u};\vec{v}}\right)$ du produit scalaire donne :

$$\vec{n}.\overrightarrow{M_0H} = \|\vec{n}\|\times\left\|\overrightarrow{M_0H}\right\|\times\cos\left(\widehat{\vec{n};\overrightarrow{M_0H}}\right) = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\times M_0H\times\cos\left(\widehat{\vec{n};\overrightarrow{M_0H}}\right) \text{ d'où :}$$

$$\left|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}\right| = \left|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times M_0H\times\cos\left(\widehat{\vec{n};\overrightarrow{M_0H}}\right)\right|$$

$$\underset{|xy|=|x||y|}{=} \left|\sqrt{a^2+b^2+c^2}\right|\times\left|M_0H\right|\times\left|\cos\left(\widehat{\vec{n};\overrightarrow{M_0H}}\right)\right| \underset{x\geq0\Rightarrow|x|=x}{=} \sqrt{a^2+b^2+c^2}\times M_0H\times\left|\cos\left(\widehat{\vec{n};\overrightarrow{M_0H}}\right)\right|\ ;$$

Mais H étant le projeté orthogonal de M_0 sur le plan, les vecteurs $\vec{n}$ et $\overrightarrow{M_0H}$ sont colinéaires donc : $\cos\left(\widehat{\vec{n};\overrightarrow{M_0H}}\right) = \pm1$ d'où finalement $\left|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\times M_0H$; CQFD !

2. La forme analytique du produit scalaire donne : $\vec{n}.\overrightarrow{M_0H} = a(x_H - x_0) + b(y_H - y_0) + c(z_H - z_0)$

$$= (ax_H + by_H + cz_H) - (ax_0 + by_0 + cz_0) \underset{H\in(P)}{=} -d - (ax_0 + by_0 + cz_0) = -ax_0 - by_0 - cz_0 - d \text{ ; CQFD !}$$

3. On déduit de ce qui précède que :

$\rightarrow$ $\left|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}\right| = \sqrt{a^2+b^2+c^2}\times M_0H$,

$\rightarrow$ $\left|\vec{n}.\overrightarrow{M_0H}\right| = \left|-ax_0 - by_0 - cz_0 - d\right| = \left|-(ax_0 + by_0 + cz_0 + d)\right| \underset{|-x|=|x|}{=} \left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|$;

D'où $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\times M_0H = \left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right| \Leftrightarrow M_0H = \dfrac{\left|ax_0 + by_0 + cz_0 + d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = d(M_0;(P))$.

Partie B

A(4 ; 1 ; 5), B(−3 ; 2 ; 0), C(1 ; 3 ; 6) et F(−7 ; 0 ; 4).

1.

a.

- On a : $\overrightarrow{AB}(-7;1;-5)$ et $\overrightarrow{AC}(-3;2;1)$; Les coordonnées de ces vecteurs n'étant pas proportionnelles, les vecteurs ne sont pas colinéaires, les points A, B et C définissent donc un plan.
- Les coordonnées des points A, B et C vérifient l'équation $x + 2y - z - 1 = 0$ qui est l'équation cartésienne d'un plan. On en déduit qu'il s'agit d'une équation du plan (ABC).
  Autre méthode(plus longue à mettre en œuvre) : on peut aussi retrouver cette équation en recherchant un vecteur normal, donc orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ (ou en vérifiant que le vecteur de coordonnées (1 ; 2 ; -1) est orthogonal à $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$) et en utilisant un des points A, B ou C pour trouver la constante correspondant.

b. $d = d(F;(P)) = \dfrac{\left|ax_F + by_F + cz_F + d\right|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \dfrac{\left|1\times(-7)+2\times0+(-1)\times4-1\right|}{\sqrt{1^2+2^2+(-1)^2}} = \dfrac{|-12|}{\sqrt{6}} = \dfrac{12\sqrt{6}}{6} = 2\sqrt{6}$.

2.

a. (Δ) étant la droite passant par le point F et perpendiculaire au plan (P) admet tout vecteur normal à (P) pour un vecteur directeur donc notamment $\vec{n}(1;2;-1)$.

Et, $M(x;y;z)\in(\Delta) \Leftrightarrow \overrightarrow{FM} = k\vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x+7 = k\times1 \\ y = k\times2 \\ z-4 = k\times(-1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -7+k \\ y = 2k \\ z = 4-k \end{cases}$ où $k\in\mathbb{R}$.

b. H est le point d'intersection de la droite (Δ) et du plan (P). Ses coordonnées vérifient donc :

$$H(x;y;z)\in(\Delta)\cap(P)\Leftrightarrow\begin{cases}\begin{cases}x=-7+k\\ y=2k\\ z=4-k\end{cases}\\ x+2y-z-1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(-7+k)+2\times2k-(4-k)-1=0\\ \begin{cases}x=-7+k\\ y=2k\\ z=4-k\end{cases}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=2\\ \begin{cases}x=-5\\ y=4\\ k=2\end{cases}\end{cases};$$

Donc H(−5 ; 4 ; 2).

c. On a : $d=FH=\sqrt{(-5-(-7))^2+(4-0)^2+(2-4)^2}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ (on retrouve bien le même résultat !).

3.

a.

- *Méthode 1 :* $FB=\sqrt{(-3-(-7))^2+(2-0)^2+(0-4)^2}=\sqrt{36}=6$; B est donc un point de S.
- *Méthode 2 :* S a pour équation : $(x+7)^2+y^2+(z-4)^2=36$;
  Les coordonnées de B vérifient cette équation, B est donc un point de S.

b. L'intersection entre (S) et (P) est bien un cercle (C) car $d=d(F;(P))=2\sqrt{6}\left(=\sqrt{24}\right)<6\left(=\sqrt{36}\right)$;

→ Le centre du cercle d'intersection est le projeté orthogonal de F sur le plan, c'est donc H.

→ Le point B étant sur le cercle recherché (car appartenant et à (S) et à (P)), le rayon est égal à :

$$HB=\sqrt{(-3-(-5))^2+(2-4)^2+(0-2)^2}=\sqrt{12}=2\sqrt{3}.$$