Exercice 1

Partie A

1. Les fonctions polynomiale et ln sont dérivables sur]0 ;+∞[. Par conséquent la fonction g l'est aussi. $g'(x) = 6x^2 + \dfrac{2}{x}$. Pour tout $x > 0$, $6x^2 > 0$ et $\dfrac{2}{x} > 0$. Donc $g'(x) > 0$ sur]0 ;+∞[. La fonction g est donc croissante sur]0 ;+∞[

2. $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x^3 - 1 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$ Par conséquent $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

De plus, la fonction g est continue sur]0 ;+∞[et strictement croissante. D'après le théorème de la bijection, il existe donc un unique réel α tel que $g(\alpha) = 0$.

La calculatrice fournit une valeur approchée de α arrondie au centième : 0,87

3. Par conséquent, si $x \in \,]0 ;\alpha[$, $g(x) < 0$ si $x > \alpha$, $g(x) > 0$ et $g(\alpha) = 0$.

Partie B

1. $\lim\limits_{x \to 0} 2x = 0$ et $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$ donc $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln x}{x^2} = -\infty$ par conséquent $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2. $f(x) - 2x = -\dfrac{\ln x}{x^2}$ or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^2} = 0$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - 2x = 0$.

Cela signifie donc que la droite Δ d'équation $y = 2x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}$.

De plus ln x est négatif sur]0 ;1] et positif sur [1 ;+∞[.

Donc $\mathcal{C}$ est au-dessus de Δ sur]0 ;1] et au-dessous de Δ sur [1 ;+∞[.

3. f est dérivable sur]0 ;+∞[comme somme et quotient de fonction dérivable sur cet intervalle.

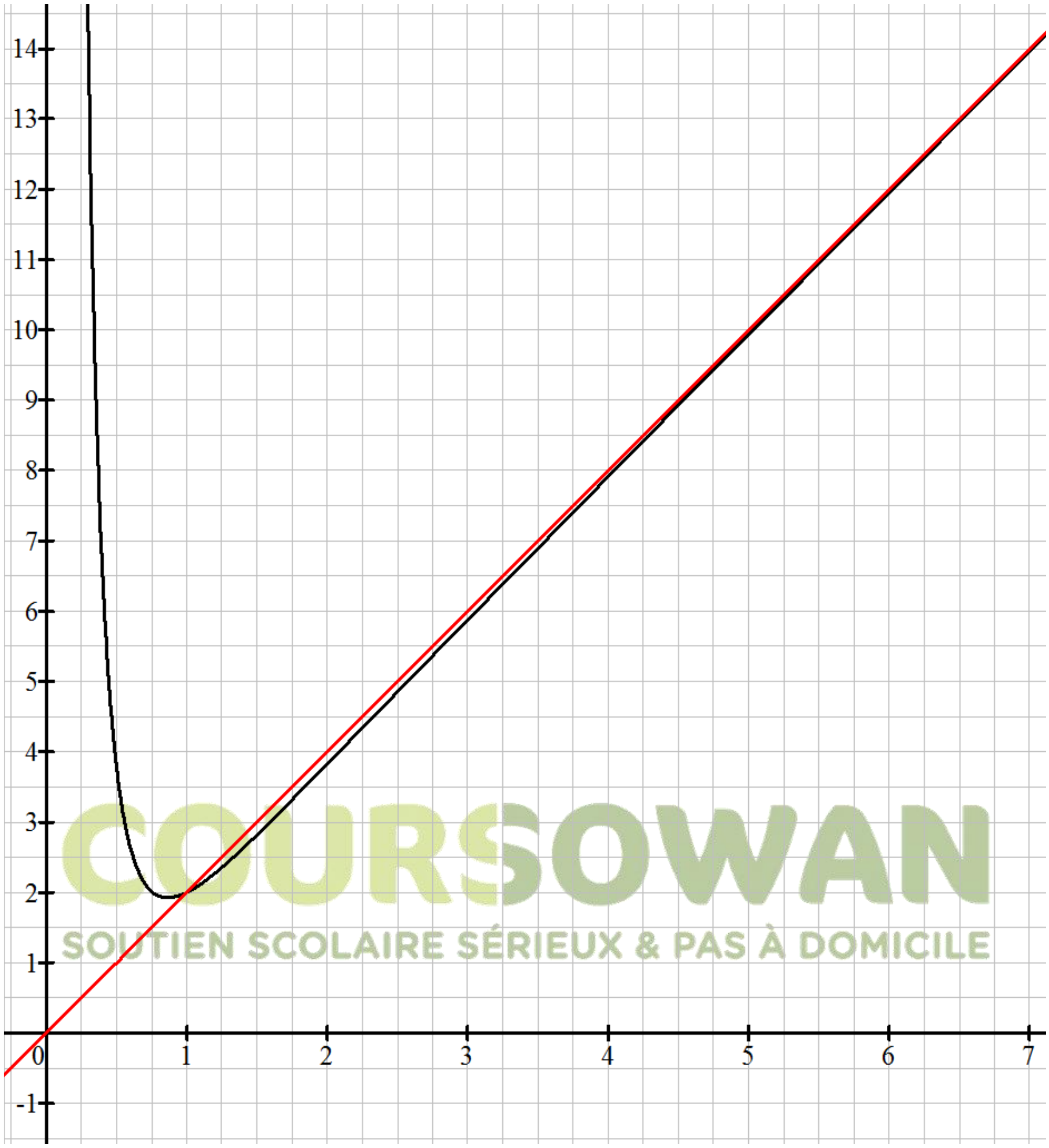
$$f'(x) = 2 - \frac{\frac{1}{x} \times x^2 - 2x \ln x}{x^4} = \frac{2x^4 - x + 2x \ln x}{x^4} = \frac{2x^3 - 1 + 2\ln x}{x^3} = \frac{g(x)}{x^3}.$$

Sur]0 ;+∞[, $x^3 > 0$. Donc f' et g ont le même signe sur]0 ;+∞[.

4.

x	0		α		+∞
$g'(x)$		-	0	+	
f	+∞	↘	$f(\alpha)$	↗	+∞

5.



Partie C

1. L'aire cherchée est égale à $\int_1^n (2x - f(x))\,dx$ u.a. $= \displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ u.a. $= 2\displaystyle\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx$ cm²

2. **a.** Utilisons , pour l'intégration par parties, $u(x) = \ln x$ $\quad u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = \dfrac{1}{x^2}$ $\quad v(x) = \dfrac{-1}{x}$.

$$\int_1^n \frac{\ln x}{x^2}\,dx = \left[\frac{-\ln x}{x}\right]_1^n - \int_1^n \frac{-1}{x^2}\,dx = \frac{-\ln n}{n} - \left[\frac{1}{x}\right]_1^n = \frac{-\ln n}{n} - \frac{1}{n} + 1$$

b. Par conséquent $I_n = 2\left(\dfrac{-\ln n}{n} - \dfrac{1}{n} + 1\right)$

3. $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n = 2$

Exercice 2

1. Il y a $\binom{4}{1} = 4$ façons de piocher une boule blanche parmi $\binom{10}{1} = 10$tirages possibles.

   Donc $P_{J1}(B) = \dfrac{4}{10} = \dfrac{2}{5}$

   De même $P_{J2}(B) = \dfrac{\binom{4}{2}}{\binom{10}{2}} = \dfrac{2}{15}$

2. D'après la propriété des probabilités totales :

   $P(B) = P(B \cap J_1) + P(B \cap J_2) + P(B \cap J_3) + P(B \cap J_4)$

   $= P(J_1) \times P_{J1}(B) + P(J_2) \times P_{J2}(B) + P(J_3) \times P_{J3}(B) + P(J_4) \times P_{J4}(B)$

   $= \dfrac{1}{4} \times \left(\dfrac{2}{5} + \dfrac{2}{15} + \dfrac{1}{30} + \dfrac{1}{210}\right)$ car tous les évènements $J_1, J_2, \ldots$ sont équiprobables.

   $= \dfrac{1}{7}$

3. On cherche $P_B(J_3) = \dfrac{P(B \cap J_3)}{P(B)} = \dfrac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{30}}{\frac{1}{7}} = \dfrac{7}{120}$

4. **a.** Les tirages sont indépendants. Il y a 2 issues à chaque tirage : B et $\overline{B}$. On joue 10 fois de suite. La variable aléatoire N suit donc une loi Binomiale de paramètre $n = 10$ et $p = \dfrac{1}{7}$.

   $P(N = k) = \binom{10}{k} \times \left(\dfrac{1}{7}\right)^k \times \left(\dfrac{6}{7}\right)^{n-k}$

   b. Par conséquent $P(N=3) = \binom{10}{3} \times \left(\dfrac{1}{7}\right)^3 \times \left(\dfrac{6}{7}\right)^7 = 0,12$ à 10^{-2} près

Exercice 3

1. Un vecteur directeur de $\mathcal{D}_1$ est $\vec{u}$ (1 ; 2 ; -1). Celui de $\mathcal{D}_2$ est $\vec{v}$ (5 ; -2 ; 1)

$\frac{1}{5} \neq \frac{2}{-2}$ donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

Cherchons si les 2 droites sont sécantes :

$$\begin{cases} 4 + t = 8 + 5t' \text{ (L1)} \\ 6 + 2t = 2 - 2t' \text{ (L2)} \\ 4 - t = 6 + t' \text{ (L3)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + t = 8 + 5t' \text{ (L1)} \\ 6 + 2t = 2 - 2t' \text{ (L2)} \\ 8 = 14 + 6t' \text{ (L1 + L3)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 + t = 8 + 5t' \text{ (L1)} \\ 6 + 2t = 2 - 2t' \text{ (L2)} \\ t' = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t = -1 \\ 6 + 2t = 2 - 2t' \text{ (L2)} \\ t' = -1 \end{cases}$$

$6 + 2t = 4$ et $2 - 2t' = 4$.

Donc les 2 droites sont sécantes. Elles sont par conséquent coplanaires.

L'affirmation est VRAIE.

2. D'une part, on calcule $AB = \sqrt{9^2 + (-6)^2 + 15^2} = \sqrt{342} = 3\sqrt{38}$

D'autre part, on calcule la distance de A à $\mathcal{P}$: $\frac{|3 \times 12 + 7 \times 2 - 5 \times (-13) - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-5)^2}} = \frac{114}{\sqrt{38}} = \frac{114}{38}\sqrt{38} = 3\sqrt{38}$

Donc B est le projeté orthogonal du point A sur $\mathcal{P}$.

Affirmation VRAIE.

3. $u_n - v_n = \frac{n+1}{n+2} - 2 - \frac{1}{n+2} = \frac{n - 2n - 4}{n+2} = \frac{-n-4}{n+2}$. La limite de ce quotient quand n tend vers $+\infty$ est -1.

Donc les suites ne sont pas adjacentes.

Affirmation FAUSSE.

4. Montrons par récurrence que cette suite est majorée par 3.

Initialisation : $u_0 = 1 < 3$. La propriété est donc vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons que $u_n < 3$

Alors $u_{n+1} = \frac{1}{3} u_n + 2 < \frac{1}{3} \times 3 + 2 = 3$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0, en supposant la propriété vraie au rang n elle est vraie au rang $n + 1$.

par conséquent, la suite est majorée par 3.

Affirmation VRAIE.

Exercice 4 (Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

1. **a.** Calculons $\frac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \frac{2i\sqrt{3} -3 - i\sqrt{3}}{2 - 3 - i\sqrt{3}} = \frac{i\sqrt{3} - 3}{-1 - i\sqrt{3}} = -i\sqrt{3}$.

Donc $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{2}$.

b. Le triangle ABC est donc rectangle en B. Le centre du cercle circonscrit est donc le milieu de [AC]. $\omega = \frac{2 + 2i\sqrt{3}}{2} = 1 + i\sqrt{3}$.

2. **a.** $z_0 = 0$; $z_1 = 2$; $z_2 = 1 + i\sqrt{3} + 2 = 3 + i\sqrt{3}$; $z_3 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}(3 + i\sqrt{3}) + 2 = 2i\sqrt{3} + 2$

$z_4 = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}\, 2i\sqrt{3} + 2 \ + 2 = 2i\sqrt{3}$

b. $A_1A_2 = |3 + i\sqrt{3} \ - 2| = 2$ $\qquad A_2A_3 = |2 + 2i\sqrt{3} - 3 - i\sqrt{3}\,| = 2$ $\qquad A_3A_4 = |2i\sqrt{3} - 2 - 2i\sqrt{3}\,| = 2$

c. $z_{n+1} - \omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z_n + 2 - \left(1 + i\sqrt{3}\right) = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z_n \ + 1 - i\sqrt{3}$

$\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega) = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z_n - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}(1 + i\sqrt{3}) = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z_n \ + 1 - i\sqrt{3}$.

Donc $z_{n+1} - \omega = \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}(z_n - \omega)$

d. On a donc $z_{n+1} - \omega = e^{i\pi/3}(z_n - \omega)$.

Il s'agit donc d'une rotation de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

e. $z_{n+6} - \omega = e^{i\pi/3}(z_{n+5} - \omega) = e^{i2\pi/3}(z_{n+4} - \omega) = e^{i3\pi/3}(z_{n+3} - \omega) \ = e^{i4\pi/3}(z_{n+2} - \omega) = e^{i5\pi/3}(z_{n+1} - \omega) = e^{i6\pi/3}(z_n - \omega) = z_n - \omega$. Donc A_{n+6} et A_n sont confondus.

$2012 = 335 \times 6 + 2$. Donc $A_{2012} = A_2 = B$

3. Montrons par récurrence que $A_{n+1}A_n = 2$.

Initialisation : $A_0A_1 = 2$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n - 1: $A_nA_{n-1} = 2 = |z_n - z_{n-1}|$

$A_{n+1}A_n = |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z_n + 2 - z_n\right| = \left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z_n + 2 - \frac{1 + i\sqrt{3}}{2}z_{n-1} - 2\right| = \left|\frac{1 + i\sqrt{3}}{2}(z_n - z_{n-1})\right| = |z_n - z_{n-1}| = 2$.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0. En la supposant vraie au rang $n - 1$, elle l'est au rang suivant.

Donc pour tout n , $A_nA_{n+1} = 2$.

Exercice 4 (Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

1. $z_1 = 1$; $z_2 = \frac{1+i}{2} + 1 = \frac{3+i}{2}$; $z_3 = \frac{1+i}{2} \times \frac{3+i}{2} + 1 = \frac{3+2i}{2}$

2. **a.** On a $z_{n+1} = \frac{1+i}{2} z_n + 1$. Il s'agit de l'équation complexe d'une similitude directe:

- de rapport : $\left|\frac{1+i}{2}\right| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

- d'angle : $\arg\left(\frac{1+i}{2}\right) = \frac{\pi}{4}$

Déterminons le centre de cette similitude en déterminant l'affixe du point fixe.

$\omega = \frac{1+i}{2}\omega + 1$ donc $\omega = \frac{1}{\frac{1-i}{2}} = 1 + i$.

b. Calculons les longueurs des 3 côtés du triangle.

$\Omega A_n = |z_n - \omega|$ $\quad\quad \Omega A_{n+1} = |z_{n+1} - \omega| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n - \omega|$

$A_{n+1}A_n = |z_{n+1} - z_n| = \left|\frac{1+i}{2} z_n + 1 - z_n\right| = \left|\frac{-1+i}{2} z_n + 1\right|$

Calculons $\frac{-1+i}{2}(z_n - \omega) = \frac{-1+i}{2} z_n - \frac{-1+i}{2}(1+i) = \frac{-1+i}{2} z_n + 1$

donc $A_{n+1}A_n = \left|\frac{-1+i}{2}(z_n - \omega)\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n - \omega|$

Par conséquent $A_{n+1}A_n = \Omega A_{n+1}$. Le triangle est isocèle en A_{n+1}.

Dans le triangle, le plus grand côté est $[\Omega A_n]$.

D'une part $\Omega A_n^2 = |z_n - \omega|^2$ D'autre part $\Omega A_{n+1}{}^2 + A_{n+1}A_n{}^2 = \frac{1}{2}|z_n - \omega|^2 + \frac{1}{2}|z_n - \omega|^2$.

Donc $\Omega A_{n+1}{}^2 + A_{n+1}A_n{}^2 = \Omega A_n^2$ **.** D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle est rectangle en A_{n+1}.

3. **a.** Montrons le résultat par récurrence.

Initialisation : $\Omega A_0 = |\omega| = \sqrt{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{-1}$. La propriété est vraie au rang 0.

Hérédité : Supposons la propriété vraie au rang n.

$\Omega A_{n+1} = |z_{n+1} - \omega| = \frac{\sqrt{2}}{2} |z_n - \omega| = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}$. La propriété est vraie au rang n+1.

Conclusion : La propriété est vraie au rang 0. En la supposant vraie au rang n, elle est vraie au rang suivant.

Donc pour tout n, $\Omega A_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}$

b. On souhaite que $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} < 0{,}001$ donc $(n-1)\ln\frac{\sqrt{2}}{2} < \ln 0{,}001$

Soit $n - 1 > \dfrac{\ln 0{,}001}{\ln\frac{\sqrt{2}}{2}}$ et donc $n > 1 + \dfrac{\ln 0{,}001}{\ln\frac{\sqrt{2}}{2}}$ d'où $n \geq 21$.

4. Puisque le triangle $\Omega A_n A_{n+1}$ est rectangle, on a

$$a_n^{\ 2} = \Omega A_n^{\ 2} - \Omega A_{n+1}^{\ 2} = \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1}\right)^2 - \left(\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-2} - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-2}\left(1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2}\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{2n-2} \times \frac{1}{2}$$

Par conséquent $a_n = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n-1} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n} \times \frac{2}{\sqrt{2}} \times \frac{1}{\sqrt{2}} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n}$

L_n est donc la somme d'une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Donc $L_n = \dfrac{1 - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$.

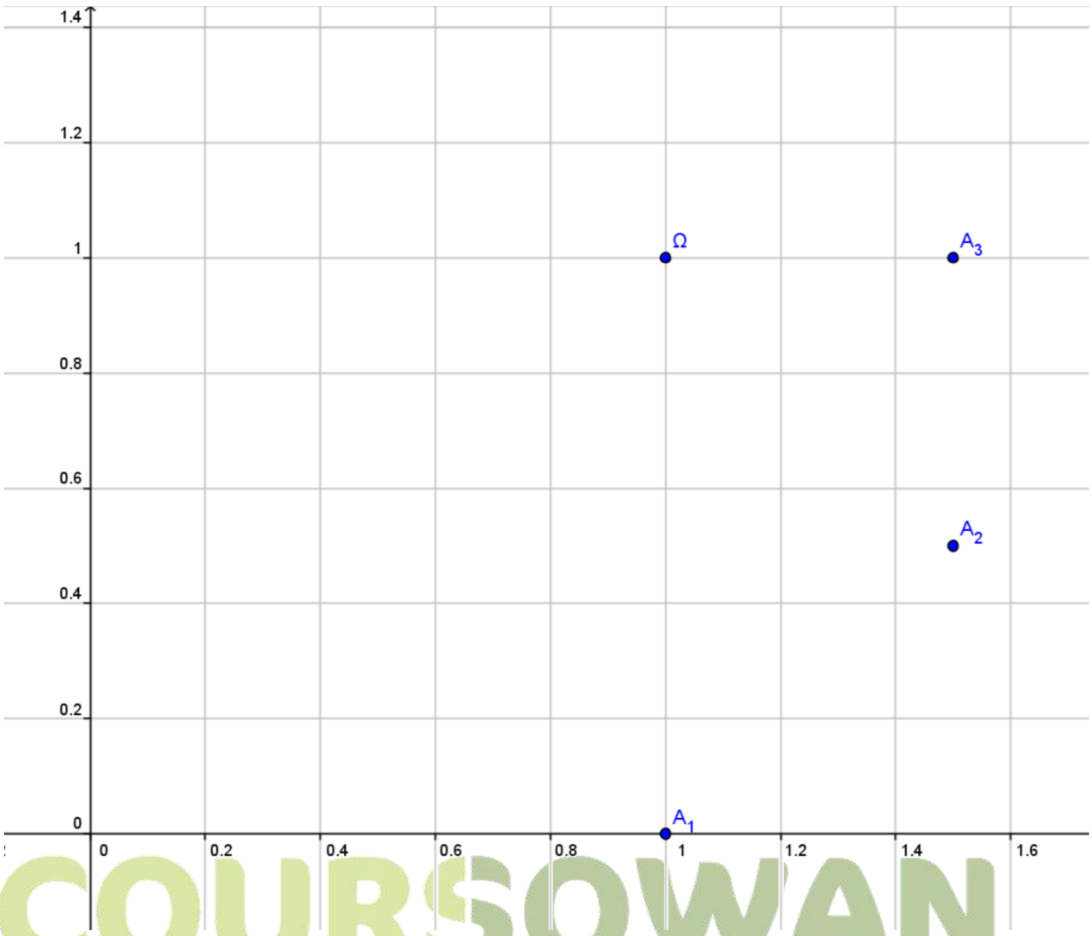
La raison est inférieure à 1 donc L_n tend donc vers $\dfrac{1}{1 - \frac{\sqrt{2}}{2}}$ quand n tend vers $+\infty$.

5. D'après l'écriture complexe de la similitude directe et de ses caractéristiques vu en **1.** on a :

$$z_{n+4} - \omega = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\pi/4}(z_{n+3} - \omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i2\pi/4}(z_{n+2} - \omega) = \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i3\pi/4}(z_{n+1} - \omega)$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i4\pi/4}(z_n - \omega).$$

Par conséquent les points A_n, Ω et A_{n+4} sont alignés.


1.4
1.2
1
0.8
0.6
0.4
0.2
0
0
0.2
0.4
0.6
0.8
1
1.2
1.4
1.6
Ω
A_3
A_2
A_1