Exercice 1

1. **a.** Le point B appartient à la courbe Γ donc $f(100) = 100$ c'est-à-dire $100 = 100\,e^{100a+b}$

Par conséquent $e^{100a+b} = 1$ et donc $100a + b = 0$

Le point C appartient à la courbe Γ donc $f(50) = \dfrac{50}{\sqrt{e}}$ c'est-à-dire $\dfrac{50}{\sqrt{e}} = 50\,e^{50a+b}$

Par conséquent $e^{50a+b} = e^{-1/2}$ et donc $50a + b = -\dfrac{1}{2}$

Le couple $(a\,;b)$ est donc solution du système $\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$.

b. On résout donc ce système.

$$\begin{cases} 100a + b = 0 \\ 50a + b = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -100a \\ 50a - 100a = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -100a \\ -50a = -\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -100a \\ a = \dfrac{1}{100} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 \\ a = \dfrac{1}{100} \end{cases}$$

Donc $f(x) = xe^{0,01x-1}$.

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} 0,01x - 1 = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{0,01x-1} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$. Donc par produit des limites, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. **a.** $f(x) = xe^{0,01x-1} = 100 \times 0,01xe^{0,01x} \times e^{-1} = \dfrac{100}{e} \times 0,01xe^{0,01x}$.

b. On sait que $\lim\limits_{t \to -\infty} te^{t} = 0$ donc ici en posant $t = 0,01x$, on en déduit que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$

4. La fonction f est un produit et composée de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$; elle est donc également dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f'(x) = e^{0,01x-1} + 0,01xe^{0,01x-1} = (1 + 0,01x)e^{0,01x-1}$

Le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $1 + 0,01x$.

Par conséquent :

x	$-\infty$		-100		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	0	$\searrow$	$-100e^{-2}$	$\nearrow$	$+\infty$

5. Pour étudier les positions relatives de Γ et (D) on étudie le signe de $f(x) - x$.

$f(x) - x = x(e^{0,01x-1} - 1)$ or $e^{0,01x-1} - 1 \geq 0 \Leftrightarrow 0,01x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 100$

On obtient donc le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		100		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$e^{0,01x-1} - 1$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

La courbe Γ est donc au-dessus de (D) sur $]-\infty\,;0] \cup [100\,;+\infty[$ et au-dessous sur $[0\,;100]$

6. **a.** $\displaystyle\int_0^{100} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{100} \frac{100}{\mathrm{e}} \times 0{,}01\, x\mathrm{e}^{0{,}01x}\,\mathrm{d}x = \frac{100}{\mathrm{e}} \int_0^{100} 0{,}01\, x\mathrm{e}^{0{,}01x}\,\mathrm{d}x$

posons $u(x) = x$ $\quad u'(x) = 1$ $\quad$ et $v'(x) = 0{,}01\mathrm{e}^{0{,}01x}$ $\quad v(x) = \mathrm{e}^{0{,}01x}$

$\displaystyle\int_0^{100} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{100}{\mathrm{e}}\left(\left[x\,\mathrm{e}^{0{,}01x}\right]_0^{100} - \int_0^{100} \mathrm{e}^{0{,}01x}\,\mathrm{d}x\right)$

$\displaystyle = \frac{100}{\mathrm{e}}\left(100\mathrm{e} - \left[100\mathrm{e}^{0{,}01x}\right]_0^{100}\right) = \frac{10000}{\mathrm{e}}$

b. $\displaystyle A = \int_0^{100} x - f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{100} x\,\mathrm{d}x - \int_0^{100} f(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{100} - \frac{10000}{\mathrm{e}}$

$\displaystyle A = 5000 - \frac{10000}{\mathrm{e}}$

Exercice 2

1. Calculons $\displaystyle\frac{b - c}{a - c} = \frac{-3 - 6\mathrm{i} - 1}{-2 + 2\mathrm{i} - 1} = \frac{-4 - 6\mathrm{i}}{-3 + 2\mathrm{i}} = \frac{(-4 - 6\mathrm{i})(-3 - 2\mathrm{i})}{3^2 + 4} = \frac{12 + 8\mathrm{i} + 18\mathrm{i} - 12}{13} = \frac{26\mathrm{i}}{13} = 2\mathrm{i}$

$\displaystyle\frac{b - c}{a - c}$ est donc un imaginaire pur. Le triangle ABC est donc rectangle en C.

2. **a.** L'écriture complexe de cette rotation est :

$z' + 3 + 6\mathrm{i} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/2}(z + 3 + 6\mathrm{i})$ soit $z' = \mathrm{i}(z + 3 + 6\mathrm{i}) - 3 - 6\mathrm{i}$

b. $z'_A = \mathrm{i}(-2 + 2\mathrm{i} + 3 + 6\mathrm{i}) - 3 - 6\mathrm{i} = \mathrm{i}(1 + 8\mathrm{i}) - 3 - 6\mathrm{i} = \mathrm{i} - 8 - 3 - 6\mathrm{i} = -11 - 5\mathrm{i}$

c. $\displaystyle s = \frac{-11 - 5\mathrm{i} - 2 + 2\mathrm{i}}{2} = \frac{-13 - 3\mathrm{i}}{2}$

d. Le triangle ABC est rectangle en C, donc le milieu D de l'hypoténuse [AB] est le centre de son cercle circonscrit. Le rayon de ce cercle est $\displaystyle\frac{AB}{2}$.

$\displaystyle z_D = \frac{-2 + 2\mathrm{i} - 3 - 6\mathrm{i}}{2} = \frac{-5 - 4\mathrm{i}}{2}$ $\qquad AB = |-3 - 6\mathrm{i} + 2 - 2\mathrm{i}| = |-1 - 8\mathrm{i}| = \sqrt{65}$

$\displaystyle DS = |s - d| = \left|\frac{-13 - 3\mathrm{i}}{2} - \frac{-5 - 4\mathrm{i}}{2}\right| = \left|\frac{-8 + \mathrm{i}}{2}\right| = \frac{\sqrt{65}}{2} = \frac{AB}{2}$

Donc S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

3. $\displaystyle\frac{s - q}{p - a} = \frac{\frac{-13}{2} - \frac{3\mathrm{i}}{2} - \frac{1}{2} - \frac{5\mathrm{i}}{2}}{2 - 5\mathrm{i} + 2 - 2\mathrm{i}} = \frac{-7 - 4\mathrm{i}}{4 - 7\mathrm{i}} = \frac{-\mathrm{i}(4 - 7\mathrm{i})}{4 - 7\mathrm{i}} = -\mathrm{i}.$

Par conséquent $(\overrightarrow{\mathbf{AP}}; \overrightarrow{\mathbf{QS}}) = \arg(-\mathrm{i}) = -\dfrac{\pi}{2}$ $\qquad$ et $\dfrac{QS}{AP} = |-\mathrm{i}| = 1$

Les droites (AP) et (QS) sont perpendiculaires et les segments [AP] et [QS] sont de même longueur.

4. Calculons $\displaystyle\frac{q - b}{p - s} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{5\mathrm{i}}{2} + 3 + 6\mathrm{i}}{2 - 5\mathrm{i} - \frac{-13}{2} + \frac{3\mathrm{i}}{2}} = \frac{3{,}5 + 8{,}5\mathrm{i}}{8{,}5 - 3{,}5\mathrm{i}} = \mathrm{i}.$

Par conséquent [BQ] et [PS] sont perpendiculaires et de même longueur.

$$\frac{s-c}{p-q} = \frac{\frac{-13}{2} - \frac{3i}{2} - 1}{2 - 5i - \frac{1}{2} - \frac{5i}{2}} = \frac{\frac{-15}{2} - \frac{3i}{2}}{\frac{3}{2} - \frac{15i}{2}} = -i.$$

par conséquent [SC] et [PQ] sont perpendiculaires et de même longueur.
Dans le triangle QSP, les droites (PA), (QB) et (SC) sont donc des hauteurs. Elles sont par conséquent concourantes.

Exercice 3

Partie A

Voici les différentes valeurs prises par U en fonction des valeurs de k

k	0	1	2
U	$3 \times 0 - 2 \times 0 + 3 = 3$	$3 \times 3 - 2 \times 1 + 3 = 10$	$3 \times 10 - 2 \times 2 + 3 = 29$

Quand N = 3 alors cet algorithme affiche 29 en sortie.

Partie B

1. $u_1 = 3u_0 - 2\times 0 + 3 = 3$ $\quad$ $u_2 = 3\times u_1 - 2\times 1 + 3 = 10$
2. **a.** Initialisation : $u_0 = 0 \geq 0$. La propriété est vraie au rang n.
   Hérédité : Supposons que $u_n \geq n$. Alors $u_{n+1} = 3\times u_n - 2n + 3 \geq 3n - 2n + 3$
   C'est-à-dire $u_{n+1} \geq n + 3 \geq n + 1$. La propriété est donc vraie au rang $n + 1$.
   Conclusion : La propriété est vraie au rang 0. En la supposant vraie au rang n, elle est encore vraie au rang suivant. Par conséquent, pour tout entier naturel n, $u_n \geq n$.
   b. La suite (u_n) est donc minorée par la suite de terme générique n dont la limite est $+\infty$. La suite (u_n) tend donc également vers $+\infty$ d'après le théorème des croissances comparées.
3. $u_{n+1} - u_n = 3u_n - 2\times n + 3 - u_n = 2u_n - 2n + 3 \geq 2n - 2n + 3 \geq 0$.
   La suite (u_n) est donc croissante.
4. **a.** $v_{n+1} = u_{n+1} - (n + 1) + 1 = 3u_n - 2n + 3 - n = 3u_n - 3n + 3 = 3v_n$.
   La suite (v_n) est donc une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = 1$
   Pour tout entier naturel n, on a donc $v_n = 3^n$.
   b. Par conséquent $3^n = u_n - n + 1$ soit $u_n = 3^n + n - 1$.
5. **a.** La suite (u_n) est croissante et sa limite est $+\infty$.
   Donc quelque soit le réel x_0, il existe un rang n_0 à partir duquel tous les termes de la suite sont supérieur à x_0.
   Si $x_0 = 10^p$, il existe donc un entier naturel n_0 tel que, pour tout $n \geq n_0$, $u_n \geq 10^p$
   b. $u_{3p} = 3^{3p} + 3p - 1 = 27^p + 3p - 1$.
   Or, d'après l'énoncé, $p \geq 1$. Donc $3p \geq 0$
   Et $27^p \geq 10^p$ Donc $u_{3p} \geq 10^p$ et $n_0 \leq 3p$.
   c. A l'aide de la calculatrice, on constate que $u_6 = 734$ et $u_7 = 2193$. Donc $n_0 = 7$.
   d.

Entrée	Saisir le nombre entier naturel p
Traitement	Affecter à N la valeur 0
	Tant que $3^N + N - 1 < 10^p$
	N prend la valeur N+1
	Fin tant que
Sortie	Afficher N

Exercice 4 (candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A

1. D'après la formule des probabilités totales :
p(Losange) = P(Losange bleu) + P(Losange rouge)
$= 0,6 \times 0,2 + 0,004x = 0,12 + 0,004x$

2. P(Etoile) = P(Etoile bleue) + P(Etoile rouge)
$= 0,6 \times 0,4 + 0,4(0,8 - 0,01x) = 0,24 + 0,32 - 0,004x = 0,56 - 0,004x$.
On veut donc que $0,12 + 0,004x = 0,56 - 0,004x$
Par conséquent $0,008x = 0,44$ et $x = 55$

3. Deux évènements A et B sont indépendants si et seulement si $p(A \cap B) = p(A)p(B)$
p(Cube bleu∩Cube marqué d'un Losange) $= 0,6 \times 0,2 = 0,12$
p(Cube bleu) = 0,6 P(Cube marqué d'un Losange) $= 0,12 + 0,004x$.
On veut donc que $0,12 = 0,6 \times (0,12 + 0,004x)$ soit $0,12 = 0,072 + 0,0024x$.
Donc $0,0024x = 0,048$ et $x = 20$.

4. $P_{\text{Loange}}(\text{Bleu}) = \dfrac{p(\text{Losange bleu})}{p(\text{Losange})} = \dfrac{0,12}{0,12 + 0,004 \times 50} = 0,375$

Partie B

1. p(au moins un cube rouge) = 1 – p(aucun cube rouge)

p(aucun cube rouge) = p(3 cubes bleus) $= \dfrac{\binom{60}{3}}{\binom{100}{3}} = \dfrac{34220}{161700}$

donc p(au moins un cube rouge) = 0,788 au millième près.

2. p(même couleur) = p(3 cubes rouges) + p(3 cubes bleus) (car ces 2 évènements sont incompatibles)

p(3 cubes rouges) $= \dfrac{\binom{40}{3}}{\binom{100}{3}} = \dfrac{9880}{161700}$.

donc p(même couleur) $= \dfrac{44100}{161700} = 0,273$ au millième près.

3. On a $\dfrac{40 \times 60}{100} = 24$ cercles bleus et $\dfrac{20 \times 40}{100} = 8$ cercles rouges.

il y a donc en tout 32 cubes marqués d'un cercle.

p(un cube marqué d'un cercle) $= \dfrac{\dbinom{32}{1} \times \dbinom{68}{2}}{\dbinom{100}{3}} = \dfrac{72896}{161700} = 0{,}451$ au millième près

Exercice 4 (candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A

1. $25 \times 13 - 108 \times 3 = 325 - 324 = 1$. Donc (13 ;3) est bien solution de (E).

2. Soit (x ;y) un autre couple solution de (E). On a donc

$25x - 108y = 1$ et $25 \times 13 - 108 \times 3 = 1$

Par différence $25(x - 13) - 108(y - 3) = 0$

Soit $25(x - 13) = 108(y - 3)$

25 et 108 sont premiers entre eux (25 est seulement divisible par 5 et 108 ne l'est pas !) donc d'après le théorème de Gauss, il existe un entier relatif k tel que :

$x - 13 = 108k$ et $y - 3 = 25k$ c'est-à-dire $x = 13 + 108k$ et $y = 3 + 25k$.

Réciproquement, vérifions que les couples de la forme ($13 + 108k$;$3 + 25k$) sont solutions de (E).

$25 \times (13 + 108k) - 108\,(3 + 25k) = 25 \times 13 + 25 \times 108k - 108 \times 3 - 108 \times 25k$

$= 325 - 324 = 1$

Donc les solutions de (E) sont les couples de la forme ($13 + 108k$;$3 + 25k$) pour tous les entiers relatifs k.

Partie B

1. $x \equiv a$ [7] donc $x - a \equiv 0$ [7] de même $x - a \equiv 0$ [19]

Comme 7 et 19 sont premiers entre eux alors $x - a \equiv 0$ [7×19]

C'est-à-dire $x - a \equiv$ [133]

2. **a.** a n'est pas un multiple de 7. 7 est un nombre premier donc d'après le petit théorème de Fermat, on a $a^{7-1} = a^6 \equiv 1$ [7]

Par conséquent $a^{108} = \left(a^6\right)^{18} \equiv 1^{18}$ [7] soit $a^{108} \equiv 1$ [7].

$\left(a^{25}\right)^g = a^{25g} = a^{1 + 108c} = a \times a^{108c} = a\left(a^{108}\right)^c \equiv a$ [7]

b. a est un multiple de 7 alors $a \equiv 0$ [7] par conséquent $a^{25} \equiv 0$ [7] et $\left(a^{25}\right)^g \equiv 0$ [7]

On a bien alors $\left(a^{25}\right)^g \equiv a$ [7]

c. On sait que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a$ [7] et que $\left(a^{25}\right)^g \equiv a$ [19]

donc d'après la question **B.1** $\left(a^{25}\right)^g \equiv a$ [133]

Partie C

1. $a^{25} \equiv r$ [133] et $r^{13} \equiv r_1$ [133] donc $\left(a^{25}\right)^{13} \equiv r_1$ [133]
   On sait d'après **B.2.c** que $\left(a^{25}\right)^{g} \equiv a$ [133]
   où g est un entier naturel tel que $25g - 108c = 1$
   Le couple (13 ;3) est solution de cette équation. Donc $\left(a^{25}\right)^{13} \equiv a$ [133]
   par conséquent $a \equiv r_1$ [133]
2. D'après la question précédente on sait que $a \equiv r_1$ [133] où $r^{13} \equiv r_1$ [133].
   Il suffit donc de déterminer à quel nombre est congru r^{13} modulo 133.

   $128^{13} = 128^{2\times 6+1}$ or $128^2 = 16384 \equiv 25$ [133] $25^6 \equiv 106$ [133]
   Donc $128^{13} \equiv 106 \times 128 \equiv 2$ [133]
   $59^{13} = 59^{2\times 6+1}$ or $59^2 = 3481 \equiv 23$ [133] $23^6 \equiv 106$ [133]
   Donc $59^{13} \equiv 106 \times 59 \equiv 3$ [133]
   Le message est donc : 2 3