Correction du Baccalauréat S Amérique du Nord mai 2007

EXERCICE 1 **3 points**

Commun à tous les candidats

1. Le plan (P) a une pour équation cartésienne : $2x + y - 3z + 1 = 0$. Les coordonnées de H vérifient cette équation donc H appartient à (P) et A n'appartient pas à (P).
Un vecteur normal à (P) est $\overrightarrow{n}(2~;~1~;~-3)$. H est le projeté orthogonal de A sur (P) si, et seulement si, $\overrightarrow{AH}$ est colinéaire à $\overrightarrow{n}$.
On a : $\overrightarrow{AH}(-1~;~-9~;~-6)$. Il est clair que les coordonnées des deux vecteurs ne sont pas proportionnelles donc les vecteurs ne sont pas colinéaires. H n'est pas le projeté orthogonal de A sur (P) : la proposition 1 est **fausse**.

2. On considère l'équation différentielle (E) : $y' = 2 - 2y$.
Cette équation s'écrit : $y' = -2y + 2$ qui d'après le cours, a pour solutions : $u(x) = k\mathrm{e}^{-2x} + 1$, $k \in \mathbb{R}$.
La condition $u(0) = 0$ donne $k + 1 = 0$ donc $k = -1$. Par conséquent : $u(x) = -\mathrm{e}^{-2x} + 1 = 1 - \mathrm{e}^{-2x}$.
Alors : $u\left(\dfrac{\ln 2}{2}\right) = 1 - \mathrm{e}^{-\ln 2} = 1 - \mathrm{e}^{\ln \frac{1}{2}} = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$ donc la proposition 2 est **vraie**.

3. On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \sqrt{7u_n}$.
Effectuons une démonstration par récurrence.
Soit P_n la proposition : « $0 \leqslant u_n \leqslant 7$ »

- (initialisation) $u_0 = 2$ donc $0 \leqslant u_0 \leqslant 7$. P_0est vraie.
- (Hérédité) Supposons P_n vraie pour un rang n.
Alors : $0 \leqslant u_n \leqslant 7$. En multipliant par 7, on obtient : $0 \leqslant 7u_n \leqslant 79$. Comme la fonction racine carré est croissante sur son ensemble de définition, on en déduit : $0 \leqslant \sqrt{7u_n} \leqslant \sqrt{49} = 7$ donc la proposition est vraie au rang $n + 1$.

On a montré que la par récurrence que la proposition est vraie pour tout n, donc la proposition 3 est **vraie**.

Exercice 2 **5 points**

Pour les candidats n'ayant pas choisi la spécialité mathématiques

1. **a.** r est la rotation de centre O et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$. Une écriture complexe d'une rotation de centre $\Omega(\omega)$ et d'angle θ est $z' - \omega = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(z-\omega)$ donc une écriture de r est : $\boxed{z' = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} z}$.

   b. B a pour affixe $z_B = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}$ et C est l'image de B par r. On en déduit : $z_C = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{2\pi}{3}} \times \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$. $\boxed{z_C = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}}$.

   c. $\boxed{z_B = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}}$ et $\boxed{z_C = \dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}}$.

   d. voir figure à la fin

2. **a.** D est le barycentre des points A, B et C affecté des coefficients 2 , -1 et 2.
   Par conséquent : $2\overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OB} + 2\overrightarrow{OC} = (2-1+2)\overrightarrow{OD}$ qui se traduit par l'égalité sur les affixes : $2z_A - z_B + 2z_C = 3z_D$ d'où $z_D = \dfrac{1}{2}(2z_A - z_B + 2z_C) = \dfrac{1}{3}\left(2\mathrm{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i} + \sqrt{3} - \mathrm{i}\right) = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

   $\boxed{z_D = \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}}$.

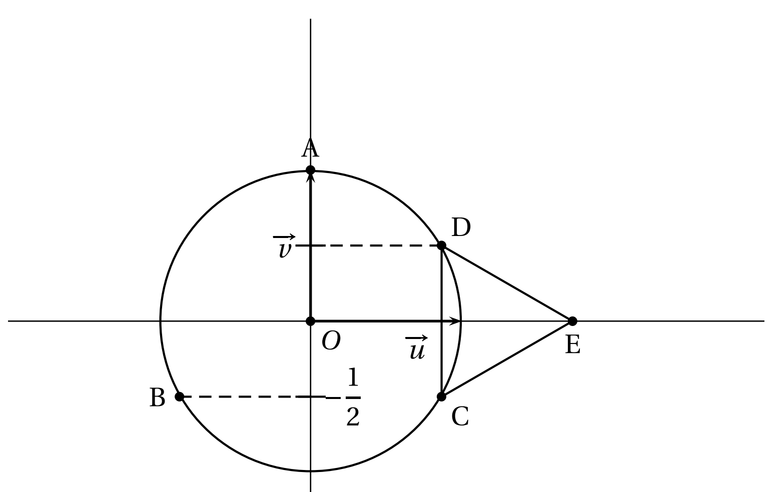
   b. $|z_A| = |\mathrm{i}| = 1$; $|z_B| = \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{5\pi}{6}}\right| = 1$ car, pour tout x, $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}| = 1$.
   De même, $|z_C| = \left|\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}\right| = 1$; $z_D = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{6}}$ donc $|z_D| = 1$.
   $\boxed{\text{Les quatre points A, B, C et D sont sur le cercle centre O et de rayon 1}}$.

3. **a.** h est l'homothétie de centre A et de rapport 2. Une écriture complexe de h est : $z' - z_A = 2(z - z_A)$ donc $z' - \mathrm{i} - 2(z - \mathrm{i})$ soit : $\boxed{z' = 2z - \mathrm{i}}$.

   b. E est l'image de D par h. On a : $z_E = 2z_D - \mathrm{i} = \sqrt{3} + \mathrm{i} - \mathrm{i} = \sqrt{3}$. $\boxed{z_E = \sqrt{3}}$.

4. **a.** $\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \dfrac{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}}{\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}} = \dfrac{\mathrm{i}}{\dfrac{\sqrt{3}}{2} + \dfrac{1}{2}\mathrm{i}} = \mathrm{i}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2} - \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\right) = \dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}$. $\boxed{\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}}$.

   b. On en déduit : $\left|\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}\right| = \dfrac{CD}{CE} = \left|\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ donc $CD = CE$.
   $\arg\left(\dfrac{z_D - z_C}{z_E - z_C}\right) = \left(\overrightarrow{CE}\,;\,\overrightarrow{CD}\right) = \arg\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{3}}\right) = \dfrac{\pi}{3}$ à $2k\pi$ près.
   CDE est isocèle et l'angle au sommet vaut $\dfrac{\pi}{3}$: **c'est un triangle équilatéral**.



EXERCICE 2 **5 points**

Pour les candidats ayant choisi la spécialité mathématiques

1. f est la transformation dont une écriture complexe est : $z' = (2-2\text{i})z+1$. Cette écriture est de la forme $z' = \alpha z + \beta$ avec $\alpha = 2-2\text{i}$ et $\beta = 1$ donc $\boxed{\text{f est une similitude directe}}$.

Elle a pour point fixe Ω d'affixe ω avec $\omega = \dfrac{\beta}{1-\alpha} = \dfrac{1}{1-(2-2\text{i})} = \dfrac{1}{-1+2\text{i}} = \dfrac{-1-2\text{i}}{\sqrt{5}} = -\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\text{i}$.

Le rapport de cette similitude est $|\alpha| = |2-2\text{i}| = |2(1-\text{i})| = 2|1-\text{i}| = 2\sqrt{2}$.

$\alpha = 2-2\text{i} = 2\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}} - \dfrac{1}{\sqrt{2}}\text{i}\right) = 2\sqrt{2}\text{e}^{-\text{i}\frac{\pi}{4}}$. Un argument de α est $-\dfrac{\pi}{4}$.

$\boxed{\text{f est la similitude directe de point fixe } \Omega\left(-\dfrac{1}{\sqrt{5}} - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\text{i}\right)\text{, de rapport } 2\sqrt{2} \text{ et d'angle } -\dfrac{\pi}{4}}$.

2. **a.** Soit B' l'image de B par f : $z_{B'} = (2-2\text{i})z_B + 1 = (2-2\text{i})(-4+2\text{i}) + 1 = -3+12\text{i}$. $z_{B'} = -3+12\text{i}$.

b. $\dfrac{z_{B'} - z_C}{z_A - z_C} = \dfrac{-3+12\text{i}-1-4\text{i}}{3+5\text{i}-1-4\text{i}} = \dfrac{-4+8\text{i}}{2+\text{i}} = \dfrac{-4(1-2\text{i})}{\text{i}(1-2\text{i})} = \dfrac{-4}{\text{i}} = 4\text{i}$.

On en déduit que $\left(\overrightarrow{CA}\ ;\ \overrightarrow{CB'}\right) = \arg\left(\dfrac{z_{B'} - z_C}{z_A - z_C}\right) = \arg(4\text{i}) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$.

Par conséquent, **les droites (CB') et (CA) sont orthogonales**.

3. Soit M d'affixe $z = x + \text{i}y$. $M' = \text{f}(M)$ a pour affixe z' avec $z' = (2-2\text{i})z + 1 = (2-2\text{i})(x+\text{i}y) + 1 = 2x + 2y + 1 + \text{i}(2z - 2x)$.

$\overrightarrow{CM'}$ a pour affixe $z' - z_C = 2x + 2y + (2x - 2y - 4)\text{i}$.

$\overrightarrow{CA}$ a pour affixe $z_{\overrightarrow{CA}} = a - c = 2 + \text{i}$.

Les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont respectivement $(2x+2y\ ;\ 2y-2x-4)$ et $(2\ ;\ 1)$.

$\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul, c'est-à-dire si et seulement si $2(2x+2y) + 2y - 2x - 4 = 0$ soit $\boxed{x + 3y = 2}$ après simplifications.

4. Soit l'équation (E) ; $x + 3y = 2$, où x et y sont des entiers relatifs.

a. $-4 + 3 \times 2 = -4 + 6 = 2$ donc $(-4\ ;\ 2)$ est solution de (E).

b. (E) s'écrit alors : $x + 3y = -4 + 3 \times 2$, c'est-à-dire $x + 4 = 3(2-y)$.

3 divise $3(2-y)$ donc 3 divise $x+4$. Il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x + 4 = 3k$.

En remplaçant dans l'équation, on obtient : $3k = 3(2-y)$ d'où $2 - y = k$ qui donne $y = 2-k$.

L'ensemble des solutions de (E) est $\boxed{\mathscr{S} = \{(-4+3k\ ;\ 2-k),\ k \in \mathbb{Z}\}}$

c. On cherche les couples solutions de (E) vérifiant $-5 \leqslant x \leqslant 5$ et $-5 \leqslant y \leqslant 5$.

$-5 \leqslant -4 + 3k \leqslant 5$ donne $-1 \leqslant 3k \leqslant 9$ d'où $-\dfrac{1}{3} \leqslant k \leqslant 3$. Alors $k \in \{0\ ;\ 1\ ;\ 2\ ;\ 3\}$.

$-5 \leqslant 2 - k \leqslant 5$ donne $-7 \leqslant -k \leqslant 3$ d'où $-3 \leqslant k \leqslant 7$.

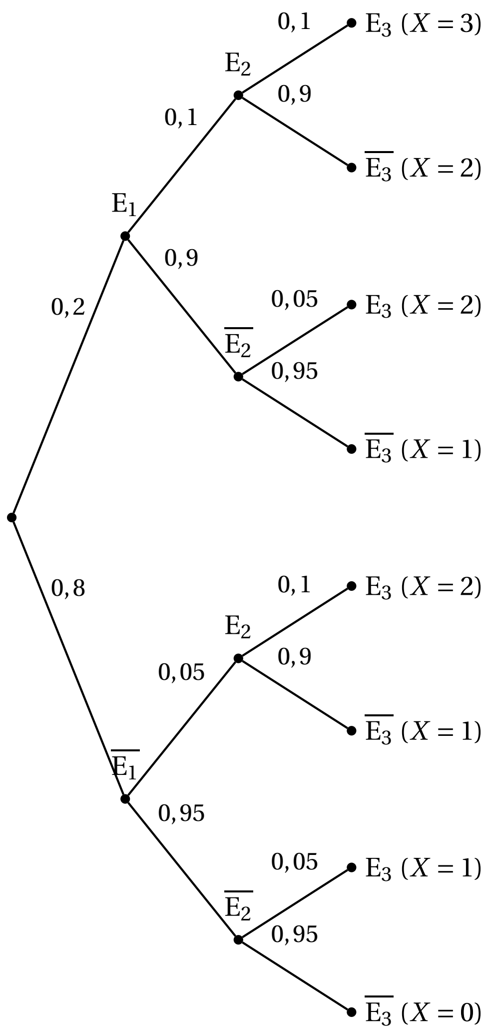
Finalement, les valeurs possibles pour k sont 0, 1 , 2 ou 3.

Les points M dont les coordonnées sont des entiers appartenant à l'intervalle [-5 ; 5] et tels que les vecteurs $\overrightarrow{CM'}$ et $\overrightarrow{CA}$ soient orthogonaux sont les points de coordonnées (-4 ; 2), (-1 ; 1), (2 ; 0) et (5 ; -1).

Remarque : on retrouve le point B qu'on avait trouvé à la question 2) a).

EXERCICE 3 **5 points**

Commun à tous les candidats



1. Représentons un arbre : (voir ci-dessus)

   X est la variable aléatoire qui donne le nombre de fois où le joueur perd lors des trois premières parties.

   a. X peut prendre les valeurs 0, 1 , 2 ou 3.

   b. $(X=2) = (\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \cap \overline{\mathrm{E}_3}) \cup (\mathrm{E}_1 \cap \overline{\mathrm{E}_2} \cap \mathrm{E}_3) \cup (\overline{\mathrm{E}_1} \cap \mathrm{E}_2 \cap \mathrm{E}_3)$.
   C'est une réunion d'événements incompatibles, donc :
   $p(X=2) = p(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \cap \overline{\mathrm{E}_3}) + p(\mathrm{E}_1 \cap \overline{\mathrm{E}_2} \cap \mathrm{E}_3) + p(\overline{\mathrm{E}_1} \cap \mathrm{E}_2 \cap \mathrm{E}_3) = (0,2 \times 0,1 \times 0,9) + (0,2 \times 0,9 \times 0,05) + (0,8 \times 0,05 \times 0,1) = 0,031$.
   $p(X=2) = \boxed{0,031}$.

   De même : $p(X=3) = p(\mathrm{E}_1 \cap \mathrm{E}_2 \cap \mathrm{E}_3) = 0,2 \times 0,1 \times 0,1 = \boxed{0,002}$.

   c. $p(X=0) = p(\overline{\mathrm{E}_1} \cap \overline{\mathrm{E}_2} \cap \overline{\mathrm{E}_3}) = 0,8 \times 0,95 \times 0,95 = \boxed{0,722}$.
   $p(X=1) - 1 - [p(X=0) + p(X=2) + p(X=3)] = 1 - (0,722 + 0,031 + 0,002) = \boxed{0,245}$.
   On en déduit la loi de probabilité de X, résumée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3
$p(X = x_i)$	0,722	0,245	0,031	0,002

   d. L'espérance de X est $E(X) = \displaystyle\sum_{i=0}^{3} x_i\, p(X = x_i) = (0 \times 0,722) + (1 \times 0,245) + (2 \times 0,031) + (3 \times 0,002) = 0,313$.
   $\boxed{E(X) = 0,313}$

2. **a.** Pour tout n non nul, $p(E_n \cap E_{n+1}) = p_{E_n}(E_{n+1}) \times p(E_n) = 0,1 \times p(E_n) = \boxed{0,1p_n}$.

De même : $p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = p_{\overline{E_n}}(E_{n+1}) \times p(\overline{E_n}) = 0,05 \times (1 - p(E_n)) = \boxed{0,05(1-p_n)}$.

b. On a : $E_{n+1} = (E_n \cap E_{n+1}) \cup (\overline{E_n} \cap E_{n+1})$ (réunion d'événements incompatibles). Par conséquent :
$p_{n+1} = p(E_{n+1}) = p(E_n \cap E_{n+1}) + p(\overline{E_n} \cap E_{n+1}) = 0,1p_n + 0,05(1-p_n) = \boxed{0,05p_n + 0,05}$

3. Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul par : $u_n = p_n - \dfrac{1}{19}$.

a. Pour tout $n \neq 0$, $u_{n+1} = p_{n+1} - \dfrac{1}{19} = 0,05p_n + 0,05 - \dfrac{1}{19} = \dfrac{1}{20}p_n + \dfrac{1}{20} - \dfrac{1}{19} = \dfrac{1}{20}p_n - \dfrac{1}{380} = \dfrac{1}{20}\left[p_n - \dfrac{1}{19}\right] = \dfrac{1}{20}u_n$.

Pour tout $n \neq 0$, $u_{n+1} = \dfrac{1}{20}u_n$ donc (u_n) est une suite **géométrique**, de raison $q = \dfrac{1}{20}$ et de premier terme $u_1 = p_1 - \dfrac{1}{19} = 0,2 - \dfrac{1}{19} = \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{19} = \dfrac{14}{95}$.

b. On en déduit : $p_n = p_1 q^{n-1}$ donc $p_n = \dfrac{14}{95}\left(\dfrac{1}{20}\right)^{n-1}$ et $p_n = u_n + \dfrac{1}{19} = \dfrac{1}{19} + \dfrac{14}{95}\left(\dfrac{1}{20}\right)^{n-1}$.

c. $-1 < \dfrac{1}{20} < 1$ donc $\lim\limits_{n \to +\infty} \left(\dfrac{1}{20}\right)^{n-1} = 0$ et par conséquent : $\lim\limits_{n \to +\infty} p_n = \boxed{\dfrac{1}{19}}$.

Exercice 4 **7 points**

Commun à tous les candidats

1. Restitution organisée de connaissances.

a. Soit la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $g(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.

g est dérivable comme différence de fonctions dérivables ; pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $g'(x) = \mathrm{e}^x - x > 0$ puisque $\mathrm{e}^x > x$ pour tout x.

$g'(x)$ est donc positif et g est croissante sur $[0\,;\,+\infty[$; g(0) = 1 donc, pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \geqslant g(0) = 1$ donc $\boxed{g(x) > 0}$.

b. On en déduit que, pour tout $x \geqslant 0$, $\mathrm{e}^x \geqslant \dfrac{x^2}{2}$. Pour $x > 0$, en divisant par x, on obtient : $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x} > \dfrac{x}{2}$.

Comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{2} = +\infty$, d'après le pré-requis, on en déduit $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = \boxed{+\infty}$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4}x\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$.

a. La fonction exponentielle est positive sur $[0\,;\,+\infty[$ donc, pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $\boxed{f(x) \geqslant 0}$.

b. Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) = \dfrac{1}{2}\dfrac{x}{2}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. On pose $X = \dfrac{x}{2}$. $\lim\limits_{x \to +\infty} X = +\infty$.

Par conséquent, d'après le théorème sur la composition des limites, on a :

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{2}X\mathrm{e}^{-X} = \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{1}{2}\dfrac{X}{\mathrm{e}^X}$.

On a vu dans la question 1. que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$.

Par conséquent : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$. La courbe C admet donc une **asymptote** d'équation $y = 0$ en $+\infty$.

c. f est dérivable sur $[0\,;\,+\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

$f = \dfrac{1}{4}u\mathrm{e}^v$ en posant $u(x) = x$ et $v(x) = -\dfrac{x}{2}$. Alors $f' = \dfrac{1}{4}(u\mathrm{e}^v)' = \dfrac{1}{4}\left(u' \times \mathrm{e}^v + u \times v'\mathrm{e}^v\right)$.

Pour tout x, on en déduit : $f'(x) = \dfrac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + x \times \left(-\dfrac{1}{2}\right) \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right) = \dfrac{1}{4}\left(1 - \dfrac{1}{2}x \times \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\right) = \boxed{\dfrac{1}{8}(2-x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}}$.

$e^{-\frac{x}{2}} > 0$ donc $f'(x)$ est du signe de $2 - x$ donc positif pour $x \leqslant 2$, nul en 2 et négatif pour $x \geqslant 2$.
f est croissante sur $[0~;~2]$ et décroissante sur $[2~;~+\infty[$.
Tableau de variations :

x	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	−
$f(x)$	0 ↗	$\dfrac{1}{2\text{e}}$	↘ 0

3. Soit F la fonction définie sur $[0~;~+\infty[$ par ; $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\text{d}t$.

a. F est la primitive de f qui s'annule en 0 donc $F' = f$. Comme on a montré que f était positive, F est positive et F est croissante.

b. Pour tout x, $F(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{1}{4} t\text{e}^{-\frac{t}{2}}$.
Posons $\alpha(t) = t$ d'où $\alpha'(t) = 1$
$\beta'(t) = \dfrac{1}{4}\text{e}^{-\frac{t}{2}}$ d'où $\beta(t) = -\dfrac{1}{2}\text{e}^{-\frac{t}{2}}$.
α et β sont continues donc on peut effectuer une intégration par parties.
Alors : $F(x) = \left[-\dfrac{1}{2}t\text{e}^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^x \text{e}^{-\frac{t}{2}}\,\text{d}t = -\dfrac{1}{2}x\text{e}^{-\frac{x}{2}} + \dfrac{1}{2}\left[-2\text{e}^{-\frac{t}{2}}\right]_0^x = \boxed{1 - \text{e}^{-\frac{x}{2}} - \dfrac{x}{2}\text{e}^{-\frac{x}{2}}}$.

c. $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left(-\frac{x}{2}\right) = -\infty$ donc par composition avec la fonction exponentielle, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \text{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$.
On a vu précédemment que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{2}\text{e}^{-\frac{x}{2}} = 0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.
On en déduit le tableau de variations de F :

x	0	$+\infty$
$F'(x) = f(x)$	+	
$F(x)$	0 ↗	1

d. F est continue puisque dérivable ; F est strictement croissante ; $F(0) = 0$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$. D'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un unique réel positif α tel que $F(\alpha) = 0,5$.
À la calculatrice, on trouve : $\boxed{\alpha \approx 3.36}$ à 0,01 près par excès.

4. $A_n = \displaystyle\int_0^n f(t)\,\text{d}t = F(n) - F(0) = F(n)$ car $F(0) = 0$. D'après la question précédente, le plus petit entier n pour lequel $A_n \geqslant 0,5$ est $\boxed{n = 4}$.