Baccalauréat S Antilles-Guyane juin 2007
Corrigé

EXERCICE 1 **6 points**

Commun à tous les candidats

Question de cours

La fonction $x \mapsto f(x) - g(x)$ est continue sur I (car f et g le sont), donc $\displaystyle\int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x$ existe. Comme de plus on a $f(x) - g(x) \geqslant 0$, la propriété de positivité permet d'écrire que : $\displaystyle\int_a^b f(x) - g(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$. On a alors, par linéarité de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^b g(x)\mathrm{d}x \geqslant 0$, d'où le résultat.

Partie A

1. Soit x un réel supérieur ou égal à 1. La fonction $t \mapsto 2 - t$ est continue sur $[1~;~x]$, et on a :

$$\int_1^x (2-t)\,\mathrm{d}t = \left[2t - \frac{1}{2}t^2\right]_1^x = \left(2x - \frac{1}{2}x^2\right) - \left(2 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}x^2 + 2x - \frac{3}{2}.$$

2. Comme $t \in [1~;~+\infty[$, $t > 0$, donc :

$$2 - t \leqslant \frac{1}{t} \Leftrightarrow 2t - t^2 \leqslant 1 \Leftrightarrow 0 \leqslant t^2 - 2t + 1 \Leftrightarrow \leqslant (2t-1)^2.$$

   La dernière inégalité étant vraie, le raisonnement par équivalences permet de conclure qu'on a bien $2 - t \leqslant \dfrac{1}{t}$.

3. Les fonctions $t \mapsto 2 - t$ et $t \mapsto \dfrac{1}{t}$ sont continues sur $[1;+\infty[$ et $2 - t \leqslant \dfrac{1}{t}$, la question de cours permet alors d'écrire que :

$$\int_1^x (2-t)\mathrm{d}t \leqslant \int_1^x \frac{1}{t}\mathrm{d}t$$

   c'est-à-dire : $-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2} \leqslant [\ln t]_1^x$, d'où : $-\dfrac{1}{2}x^2 + 2x - \dfrac{3}{2} \leqslant \ln x$.

Partie B

1. **a.** h est continue sur $\mathbb{R}$ (polynôme) et :

$$\int_1^4 h(x)\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{6}x^3 + x^2 - \frac{3}{2}x\right]_1^4 = \left(-\frac{1}{6} \times 64 + 16 - 6\right) - \left(-\frac{1}{6} + 1 - \frac{3}{2}\right) = -\frac{4}{6} + \frac{4}{6} = 0.$$

   b. Sur le graphique, les deux aires coloriées sont égales.

2. Sur $[1;4]$ on a $h(x) \leqslant \ln x$ (question A3), l'aire $\mathscr{A}$ du domaine (D) est donc donnée par : $\mathscr{A} = \displaystyle\int_1^4 (\ln x - h(x))\mathrm{d}x = \int_1^4 \ln x \mathrm{d}x$ (par linéarité et compte-tenu du fait que $\displaystyle\int_1^4 h(x)\mathrm{d}x = 0$). Posons $u'(x) = 1$, $v(x) = \ln x$ et $u(x) = t$, $v'(x) = \dfrac{1}{x}$. Les fonctions u, v sont dérivables sur $[1~;~4]$, les fonctions u', v' sont continues sur $[1~;~4]$, le théorème d'intégration par parties s'applique donc et on a :

$$\mathscr{A} = [x\ln x]_1^4 - \int_1^4 1\mathrm{d}x = 4\ln 4 - 1 \times (3-1) = 8\ln 2 - 3 \text{ u.a.}$$

EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité.

1. On pose $z = x + \mathrm{i}y$ et $z' = x' + \mathrm{i}y'$ avec x, y, x' et y' réels.

a. Par définition : $z' = \dfrac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right)$, c'est-à-dire :

$$x' + \mathrm{i}y' = \frac{1}{2}(x + \mathrm{i}y + \mathrm{i}(x - \mathrm{i}y)) = \frac{1}{2}(x + \mathrm{i}y + \mathrm{i}x + y) = \frac{1}{2}(x + y) + \frac{1}{2}(x + y)\mathrm{i}.$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires, on obtient les égalités annoncées.

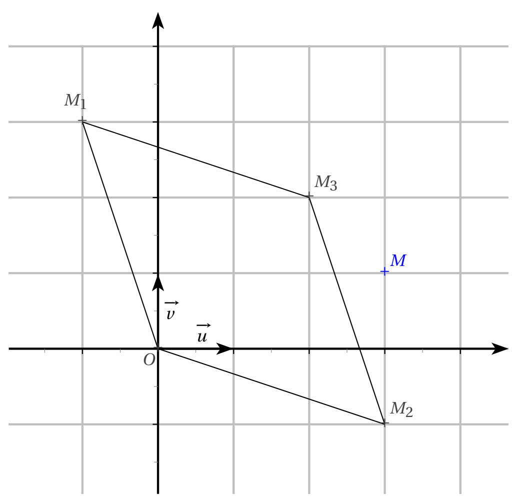
On en déduit que $y' = x'$ donc que M' appartient à la droite d'équation $y = x$. Or O et A appartiennent aussi à cette droite, d'où $M' \in (OA)$.

b. $M = M' \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}(x+y) \\ y = \frac{1}{2}(x+y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = x+y \\ 2y = x+y \end{cases} \Leftrightarrow \{x = y$. L'ensemble cherché est donc la droite (OA).

c. Un calcul immédiat montre que $\overrightarrow{MM'}$ a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2}(y - x)\ ;\ \dfrac{1}{2}(x - y)\right)$ et $\overrightarrow{OA}\,(1\ ;\ 1)$. Donc $\overrightarrow{MM'} \cdot \overrightarrow{OA} = \dfrac{1}{2}(y - x) + \dfrac{1}{2}(x - y) = 0$, et $\overrightarrow{MM'} \perp \overrightarrow{OA}$.

2. a. Voir figure 1.

FIG. 1 – exercice 2 (non-spécialité)



b. L'écriture complexe de la rotation r de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$ est : $z \mapsto \mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}z = \mathrm{i}z$.

Par conséquent $z_1 = \mathrm{i}z$.

Par définition du point M_3, $\overrightarrow{M_1M_3} = \overrightarrow{OM_2}$, donc $z_3 - z_1 = z_2 - 0$, ce qui donne : $z_3 - \mathrm{i}z = \overline{z}$, c'est-à-dire $z_3 = \mathrm{i}z + \overline{z}$.

c. On a : $OM_1 = |z_1 - 0| = |iz| = |i| \times |z| = |z|$;

$OM_2 = |\overline{z}| = |z|$.

Le parallélogramme $OM_1M_3M_2$ a deux côtés consécutifs de même longueur, c'est donc un losange.

d. $z' - z = \dfrac{1}{2}\left(z + \mathrm{i}\overline{z}\right) - z = \dfrac{1}{2}\left(z + i\overline{z} - 2z\right) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{i}\overline{z} - z\right)$.

Par ailleurs, $\dfrac{1}{2}\mathrm{i}z_3 = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}\left(iz + \overline{z}\right) = \dfrac{1}{2}\left(-z + \mathrm{i}\overline{z}\right)$, on a donc bien $z' - z = \dfrac{1}{2}\mathrm{i}z_3$.

On en déduit que $|z' - z| = \left|\dfrac{1}{2}\mathrm{i}z_3\right| = \dfrac{1}{2} \times |\mathrm{i}| \times |z_3|$, c'est-à-dire que $MM' = \dfrac{1}{2}OM$.

3. On a déjà $OM = OM_1 = OM_2 = |z|$, les points M, M_1 et M_2 sont donc sur un même cercle de centre O. M_3 appartient à ce cercle si et seulement si $OM_3 = OM$ c'est-à-dire (d'après la question 2d) si et seulement si $2MM' = OM$, ce qui équivaut bien à $MM' = \dfrac{1}{2}OM$.
Le triangle OMM' est rectangle en M' ; en effet $M' \in (OA)$ et $(MM') \perp (OA)$ (question 1), on a donc :

$$\sin \widehat{M'OM} = \frac{MM'}{OM} = \frac{\frac{1}{2}OM}{OM} = \frac{1}{2}.$$

On en déduit que $\widehat{M'OM} = \dfrac{\pi}{6}$.

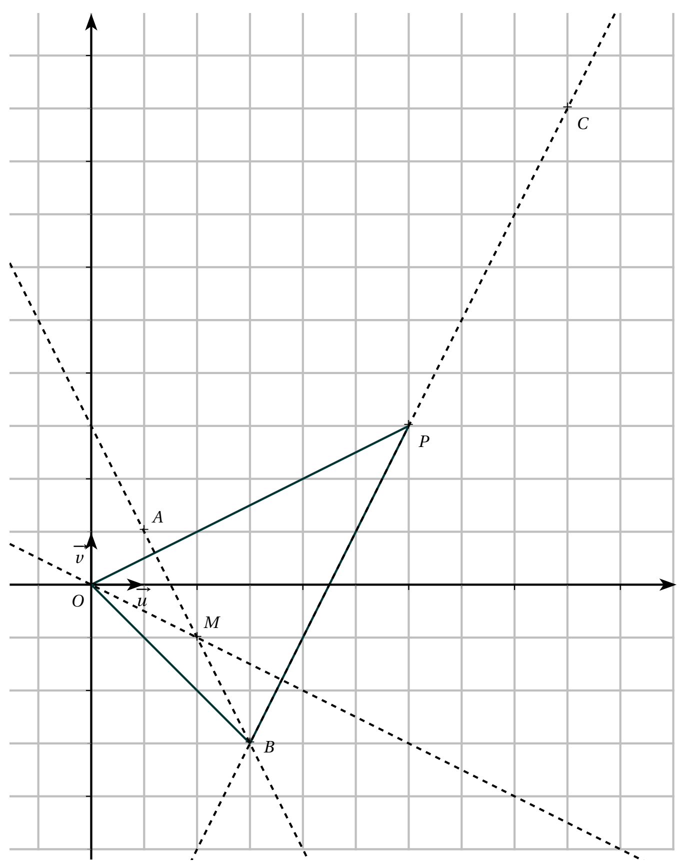
EXERCICE 2 **5 points**

Réservé aux candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

Partie A

1. Voir figure 2.

FIG. 2 – exercice 2 (spécialité)



2. s est la composée d'une similitude indirecte (S_1) par une similitude directe (h), c'est donc une similitude indirecte.

3. S_1 a pour écriture complexe $z \mapsto \overline{z}$ et h a pour écriture complexe $z \mapsto 3z$.
$s = h \circ S_1$ a donc pour écriture complexe $z \mapsto 3\overline{z}$.

4. **a.** $z_B = 3\overline{z_A} = 3(1 - \text{i}) = 3 - 3\text{i}$.

b. $-3\text{i}z_A = -3\text{i}(1 + \text{i}) = -3\text{i} - 3\text{i}^2 = 3 - 3\text{i} = z_B$, ce qu'il fallait démontrer.
On a alors : $\left(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B - z_O}{z_A - z_O}\right) = \arg\left(\dfrac{z_B}{z_A}\right) = \arg(-3\text{i}) = -\dfrac{\pi}{2}\ (2\pi)$.

5. M a pour affixe $z_M = \dfrac{z_A + z_B}{2} = \dfrac{1+\mathrm{i}+3-3\mathrm{i}}{2} = 2-\mathrm{i}$.
P a pour affixe $z_P = 3\overline{z_M} = 3(2+\mathrm{i}) = 6+3\mathrm{i}$.
On a $\overrightarrow{OP}\,(6~;~3)$ et $\overrightarrow{AB}\,(2~;~-4)$, donc $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB} = 6\times 2+3\times(-4) = 12-12 = 0$, ce qui prouve bien que $(OP)\perp(AB)$.

Partie B

1. M est le milieu de $[AB]$, et une similitude conserve les milieux, donc $s(M)$ est le milieu de $[s(A)s(B)]$, autrement dit P est le milieu de $[BC]$.
2. **a.** $s\circ s$ a pour écriture complexe : $z' \mapsto 3\left(\overline{3\overline{z}}\right) = 9z$. On reconnaît l'écriture complexe de l'homothétie de centre O et de rapport 9.
   b. $s(O) = O$ (calcul immédiat).
   $s(P) = s\circ s(M)$ or $s\circ s$ est une homothétie de centre O, donc les points O, M et $s(P)$ sont alignés.
   L'image de la droite (OP) par la similitude s est la droite passant par $s(O)$ et $s(P)$; c'est donc la droite (OM).
   c. On sait que $(BM)\perp(OP)$ d'après la question A5 : M appartient donc à la hauteur issue de B dans le triangle OBP.
   Une similitude conserve l'orthogonalité donc $s((BM))\perp s((OP))$. Or $s(B) = C$ et $s(M) = P$, et on a vu que $s((OP)) = (OM)$, on a donc montré que $(BP)\perp(OM)$.
   On en déduit que M appartient à la hauteur issue de O dans le triangle OBP.
   M est donc l'orthocentre du triangle OBP.

EXERCICE 3 **5 points**
Commun à tous les candidats

1. Les plans (P) et (Q) ont pour vecteurs normaux respectifs $\overrightarrow{n}\,(0;2;1)$ et $\overrightarrow{n'}\,(0~;~1~;~-2)$.
On a $\overrightarrow{n}\cdot\overrightarrow{n'} = 0$, donc $\overrightarrow{n}\perp\overrightarrow{n'}$ et par suite, les plans (P) et (Q) sont perpendiculaires.
2. L'intersection des plans (P) et (Q) est une droite (plans perpendiculaires).
$A\in(P)$ car $2\times 0+6-6 = 0$ et $A\in(Q)$ car $0-12+12 = 0$, donc $A\in(P)\cap(Q)$;
on montre de la même façon que $I\in(P)\cap(Q)$.
Les points A et I étant distincts, la droite d'intersection des plans (P) et (Q) est donc la droite (AI), c'est-à-dire la droite (D).
3. Soit $M(x~;~y~;~z)$ un point de l'espace. M appartient à l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ z &=& 0\end{array}\right.$.
M appartient à l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ et au plan (P) si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ z &=& 0\\ 2y+z-6 &=& 0\end{array}\right.$
c'est-à-dire si et seulement si $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 0\\ y &=& 3\\ z &=& 0\end{array}\right.$. Le plan (P) coupe donc l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ au point $B(0~;~3~;~0)$.
Un raisonnement analogue montre que le plan (Q) coupe l'axe $\left(O;\overrightarrow{j}\right)$ en un point $C(0~;~-12~;~0)$.
4. On a $\overrightarrow{AC}\,(-3~;~-12~;~-6)$ donc le plan (T) a une équation cartésienne de la forme : $-3x-12y-6z+d = 0$. Et $B(0~;~3~;0)\in(T)$, donc $0-12\times 3-0+d = 0$, d'où $d = 36$.
Le plan (T) a donc pour équation cartésienne $-3x-12y-6z+36 = 0$, ou encore, en simplifiant par -3 : $x+4y+2z-12 = 0$.
5. La droite (OA) passe par $O(0~;~0~;~0)$ et a pour vecteur directeur $\overrightarrow{OA}\,(3~;~0~;~6)$. Une représentation paramétrique de (OA) est donc : $\left\{\begin{array}{rcl} x &=& 3t\\ y &=& 0\\ z &=& 6t\end{array}\right.\quad(t\in\mathbb{R})$.

Un point M appartient à la droite (OA) et au plan (T) si et seulement si il existe un réel t tel que $M(3t\ ;\ 0\ ;\ 6t)$ et $(3t)+4\times 0+2\times(6t)-12=0$, ce qui donne une unique valeur : $t=\dfrac{4}{5}$. La droite (OA) et le plan (T) sont donc sécants en un point H qui a pour coordonnées $\left(3\times\dfrac{4}{5}\ ;\ 0\ ;\ 6\times\dfrac{4}{5}\right)$, c'est-à-dire $H\left(\dfrac{12}{5}\ ;\ 0\ ;\ \dfrac{24}{5}\right)$.

6. Les points B et H appartiennent au plan (T) qui a pour vecteur normal $\overrightarrow{OA}$, donc $(BH)\perp(AC)$: le point H appartient à la hauteur issue de B du triangle ABC.
$\overrightarrow{AH}\left(-\dfrac{3}{5};0;-\dfrac{6}{5}\right)$ et $\overrightarrow{BC}\,(0\ ;\ -15\ ;\ 0)$, donc $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ et $(AH)\perp(BC)$: le point H appartient donc à la hauteur issue de A du triangle ABC.
Le point H est donc l'orthocentre du triangle ABC.

EXERCICE 4 — 4 points

Commun à tous les candidats

Notons :

- $S1$ (respectivement $S2$) l'événement « la pièce est fabriquée par le sous-traitant S1 (resp. S2) » ;
- $P1$ (respectivement $P2$) l'événement « la pièce est du type P1 (resp. P2) ».

D'après les indications de l'énoncé on a déjà :

$$p_{P1}(S1)=0{,}8 \qquad p_{P1}(S2)=0{,}2 \qquad p_{P2}(S1)=0{,}4 \qquad p_{P2}(S2)=0{,}6.$$

1.
   a. Il y a autant de pièces de chaque type donc $p(P1)=0{,}5$.

   b. La probabilité que ce soit une pièce P1 et qu'elle vienne de S1 est : $p(P1\cap S1)=p_{P1}(S1)\times p(P1)=0{,}8\times 0{,}5=0{,}4$.

   c. La probabilité qu'elle vienne de S1 est, d'après la formule des probabilités totales :

$$p(S1)=p(S1\cap P1)+p(S2\cap P2)=p_{P1}(S1)\times p(P1)+p_{P2}(S1)\times p(P2)=0{,}8\times 0{,}5+0{,}4\times 0{,}5=0{,}6.$$

2. Il y a 200 pièces au total, soit 100 P1 et 100 P2. Cette fois l'employé tire deux pièces simultanément. On suppose tous les tirages équiprobables. Il y a donc $\binom{200}{2}$ tirages possibles.

   a. La probabilité que ce soit deux pièces P1 est :

$$\frac{\binom{100}{2}}{\binom{200}{2}}=\frac{\frac{200\times 199}{2\times 1}}{\frac{100\times 99}{2\times 1}}\simeq 0{,}2487.$$

   b. La probabilité que ce soit deux pièces, l'une P1 et l'autre P2, est :

$$\frac{\binom{100}{1}\times\binom{100}{1}}{\binom{200}{2}}=\frac{100\times 100}{\frac{200\times 199}{2\times 1}}\simeq 0{,}5025.$$

   c. Il y a $0{,}6\times 200=120$ pièces fabriquées par le sous-traitant S1 et donc $200-120=80$ pièces fabriquées par S2. La probabilité que les deux pièces choisies soient fabriquées par le même fournisseur est :

$$\frac{\binom{120}{2}}{\binom{200}{2}}+\frac{\binom{80}{2}}{\binom{200}{2}}=\frac{120\times 119}{200\times 199}+\frac{80\times 79}{200\times 199}=\frac{103}{199}.$$

3. D'après le tableau la durée de vie d'une pièce P1 fabriquée par S1 est 0,2. La probabilité que cette durée de vie soit inférieure à 5 ans est donc :

$$p(X\leqslant 5)=\int_0^5 0{,}2\mathrm{e}^{-0{,}2t}\,\mathrm{d}t=\left[-\mathrm{e}^{-0{,}2t}\right]_0^5=1-\mathrm{e}^{-0{,}2\times 5}=1-\mathrm{e}^{-1}\simeq 0{,}6321.$$

FIG. 3 – Annexe (à rendre avec la copie)