Correction Baccalauréat S Amérique du Nord Mai 2008
http ://www.maths-express.com

Exercice 1

1. Voir la figure finale à la fin de l'exercice !
2. (a) Le cercle Γ est l'ensemble des points M du plan tels que $AM = \sqrt{2}$, ou encore ; $AM^2 = 2$.
   En posant $z =$ affixe de M, on peut alors dire que $M \in \Gamma \Longleftrightarrow |z - z_A|^2 = 2$.
   Posons alors $z = x + \mathrm{i}y$ avec x et y réels.
   On a alors : $|z - z_A|^2 = |(x + \mathrm{i}y) - (2 + \mathrm{i})|^2 = |(x - 2) + \mathrm{i}(y - 1)|^2 = (x - 2)^2 + (y - 1)^2$.
   Le cercle Γ a donc pour équation cartésienne : $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 2$.
   Les points de l'axe $(O; \vec{u})$ sont ceux d'ordonnée nulle.
   Donc, les points d'intersection entre Γ et l'axe $(O; \vec{u})$ sont ceux dont les coordonnées $(x; y)$ vérifient le système :
   $$\begin{cases} (x-2)^2 + (y-1)^2 = 2 \\ y = 0 \end{cases}$$
   Ce qui peut s'écrire :
   $$\begin{cases} (x-2)^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$
   Système dont les solutions sont
   $$\begin{cases} x = 1 \text{ et } y = 0 \\ \text{ou} \\ x = 3 \text{ et } y = 0 \end{cases}$$
   D'où deux points d'intersection entre Γ et l'axe $(O; \vec{u})$.
   $$B(1; 0) \quad \text{et} \quad C(3; 0)$$
   Points donc les affixes respectifs sont $z_B = 1$ et $z_C = 3$.

   (b) Le point D est le point diamètralement opposé à B sur Γ . Le centre de Γ est A, donc A est le milieu de $[BD]$.
   On a donc la relation suvante entre les affixes des points A, B et D .
   $$z_A = \frac{1}{2}(z_B + z_D)$$
   ce qui donne $z_D = 2z_A - z_B$. D'où ..après calcul ...$z_D = 3 + 2\mathrm{i}$.
3. M d'affixe $z_M = \dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$.

   (a) $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \dfrac{3 + 2\mathrm{i} - \frac{3}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i}}{1 - \frac{3}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i}}$
   $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \dfrac{\frac{12}{5} + \frac{4}{5}\mathrm{i}}{\frac{2}{5} - \frac{6}{5}\mathrm{i}}$
   $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = \dfrac{6 + 2\mathrm{i}}{1 - 3\mathrm{i}}$
   $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = 2\mathrm{i} \times \dfrac{-3\mathrm{i} + 1}{1 - 3\mathrm{i}}$
   $\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M} = 2\mathrm{i}$

   (b) On peut alors dire que $\mathrm{Arg}(\dfrac{z_D - z_M}{z_B - z_M}) = \dfrac{\pi}{2}$. Donc le triangle BMD est rectangle en M.
   Donc, M appartient au cercle de diamètre $[BD]$.... qui est justement le cercle Γ !

4. $\Gamma' =$ Cercle de diamètre $[AB]$. $N \in \Gamma \cap (BM)$.

   (a) C'est une question qui peut se traiter simplement par les homothéties !

   Posons $h =$ homothétie de centre B et de rapport $k = \dfrac{1}{2}$.

   Comme $A =$ milieu de $[BD]$, on a : $h(D) = A$.

   De plus, $B \in \Gamma$ et $[BD]$ est un diamètre de Γ, donc l'image de Γ par h est le cercle de diamètre $[BA]$, c'est à dire Γ'.

   De plus, l'image de la droite (BM) par h est (BM) car B est le centre de h.

   Or, $M \in \Gamma \cap (BM)$, donc $h(M) \in \Gamma' \cap (BM)$.

   Mais, $\Gamma' \cap (BM) = \{B, N\}$ et $h(M) \neq B$ donc $h(M) = N$.

   Comme l'image d'une droite (d) par h est une droite (d') parallèle à (d), on en déduit que l'image de (DM) est la droite (AN) qui est donc parallèle à (DM).

   (b) L'expression complexe de l'homothétie de centre B et de rapport $k = \dfrac{1}{2}$ est :

$$z' - z_B = \frac{1}{2}(z - z_B)$$

$$z' = \frac{1}{2}(z - z_B) + z_B$$

$$z' = \frac{1}{2}(z - 1) + 1 = \frac{1}{2}z + \frac{1}{2}$$

   Pour $z = z_M = \dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$, on a alors $z' = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}$.

   L'affixe de N est donc $z_N = \dfrac{4}{5} + \dfrac{3}{5}\mathrm{i}$.

5. $M' =$ image de M par la rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

   (a) On pose $r =$ rotation de centre B et d'angle $-\dfrac{\pi}{2}$.

   L'expression complexe de r est $z' - z_B = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(z - z_B)$.

   On sait que $\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\frac{\pi}{2}} = -\mathrm{i}$, donc l'expression complexe de r est :

$$z' = -\mathrm{i}(z - 1) + 1 \qquad z' = -\mathrm{i}z + 1 + \mathrm{i}$$

   Pour $z = z_M = \dfrac{3}{5} + \dfrac{6}{5}\mathrm{i}$, on a alors :

$$z' = -\mathrm{i}\left(\frac{3}{5} + \frac{6}{5}\mathrm{i}\right) + 1 + \mathrm{i} = \frac{2}{5} + \frac{11}{5}\mathrm{i}$$

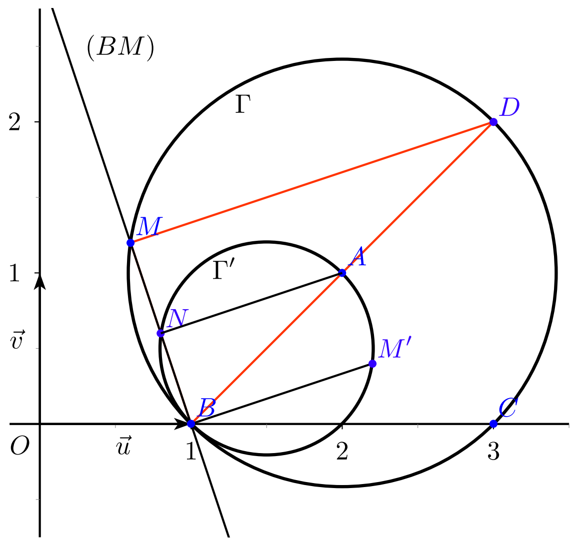
   L'affixe de $M' = r(M)$ est donc $z_{M'} = \dfrac{2}{5} + \dfrac{11}{5}\mathrm{i}$.

   (b) $[AB]$ est un diamètre de Γ'. Donc, $M' \in \Gamma'$ si et seulement si ABM' est rectangle en M'.

   Or, $\dfrac{z_A - z_{M'}}{z_B - z_{M'}} = \dfrac{2 + \mathrm{i} - \frac{2}{5} - \frac{11}{5}\mathrm{i}}{3 - \frac{2}{5} - \frac{11}{5}\mathrm{i}} = \dfrac{-1 + 3\mathrm{i}}{-6 - 2\mathrm{i}} = -\dfrac{1}{2}\mathrm{i}$.

   Donc $\mathrm{Arg}\left(\dfrac{z_A - z_{M'}}{z_B - z_{M'}}\right) = -\dfrac{\pi}{2}$. Le triangle BAM' est donc bien rectangle en M'.

   Le point M' appartient bien au cercle Γ'.


(BM)
Γ
D
M
A
Γ′
N
M′
B
C
O
1
2
3
$\vec{u}$
$\vec{v}$

Exercice 2 , Enseignement obligatoire.

Partie A

On considère deux points A et D de lespace et on désigne par I le milieu du segment $[AD]$.

1. Pour M un point quelconque de l'espace.
   $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{ID}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) = (\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA})$ car $\overrightarrow{ID} = -\overrightarrow{IA}$.
   D'où , $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = \overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MI} - \overrightarrow{IA}.\overrightarrow{IA} = MI^2 - IA^2$.
2. De là, on en déduit que $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = 0 \iff MI^2 = IA^2$.
   Donc, l'ensemble (E) des points M de l'espace vérifiant $\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MA} = 0$ est la sphère de centre I et de rayon IA.

Partie B

1. $A(3; 0; 0)$, $B(0; 6; 0)$, $C(0; 0; 4)$ et $D(-5; 0; 1)$.
   (a) $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ est normal au plan (ABC) si et seulement si il est orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   Donc, si et seulement si $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 0$.
   Or, $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.
   Donc $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AB} = 4 \times (-3) + 2 \times 6 + 3 \times 0 = 0$ et $\overrightarrow{n}.\overrightarrow{AC} = 4 \times (-3) + 2 \times 0 + 3 \times 4 = 0$.
   $\overrightarrow{n}$ est donc bien orthogonal aux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$, donc $\overrightarrow{n}$ est bien un vecteur normal au plan (ABC).
   (b) On sait que si $\overrightarrow{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P) alors une équation cartésienne de (P) est de la forme : $(P): \ ax + by + cz = d \quad$ avec $d \in \mathbb{R}$
   Donc, d'après la question précédente, une équation cartésienne de (ABC) est de la forme
   $$(ABC): \ 4x + 2y + 3z = d$$
   Comme $A \in (ABC)$, on a : $4 \times 3 + 2 \times 0 + 3 \times 0 = d$, d'où $d = 12$.
   Une équation cartésienne de (ABC) est donc :$(ABC): \ 4x + 2y + 3z = 12$.
2. (a) La droite Δ passant par D et orthogonale à (ABC) a pour vecteur directeur $\overrightarrow{n}$, car $\overrightarrow{n}$ est normal à (ABC).
   Donc, $M \in \Delta \iff \overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{DM}$ sont colinéaires.
   On pose $M(x; y; z)$. On a alors $\overrightarrow{DM}\begin{pmatrix} x+5 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$.
   $\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{DM}$ sont colinéaires si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{DM} = \lambda\overrightarrow{n}$.
   Donc, $M \in \Delta$ si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\begin{pmatrix} x+5 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.
   D'où une représentation paramétrique de Δ.
   $$\Delta: \begin{cases} x = 4\lambda - 5 \\ y = 2\lambda \\ z = 3\lambda + 1 \end{cases} \qquad (\lambda \in \mathbb{R})$$
   (b) H est le point d'intersection entre Δ et (ABC).
   Donc, comme $H \in \Delta$, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que les coodonnées de H soient
   $$(4\lambda - 5\,;\, 2\lambda\,;\, 3\lambda + 1)$$
   .
   De plus, $H \in (ABC)$ donc ses coordonnées vérifient l'équation cartésienne de (ABC).
   Donc, on a : $4(4\lambda - 5) + 2(2\lambda) + 3(3\lambda + 1) = 12$. D'où ... après simplication ...$\lambda = 1$.
   D'où H a pour coordonnées (-1 ; 2 ; 4).

(c) La distance de D au plan (ABC) est DH.
$DH = \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2} = \cdots = \sqrt{29}$ ...après calcul !

(d) $H \in (E)$ si et seulement si $\overrightarrow{DH}.\overrightarrow{AH} = 0$.
On calcule alors les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{AH}$ ... puis on calcule le produit scalaire de ces deux vecteurs ... et on conclut !

Exercice 2 , Spécialité.

(S) : $x^2+y^2-z^2=1$, dans le repère orthonormal $(\mathrm{O}\,;\,\overrightarrow{i}\,,\overrightarrow{j}\,,\overrightarrow{k}\,)$.

1. (S) est symétrique par rapport au plan (xOy) si et seulement si pour tout $M(x\,;\,y\,;\,z)$ de l'espace, on a : $M\in(S)\Longleftrightarrow N(x;y;-z)\in(S)$.
   Or, $x^2+y^2-z^2=1\Longleftrightarrow x^2+y^2-(z)^2=1$, d'où la réponse.
2. $A(3\,;\,1\,;\,\text{-}3)$ et $B(\text{-}1\,;\,1\,;\,1)$.
   (a) $M\in(D)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires.
   C'est à dire, si et seulement si il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{AM}=\lambda\overrightarrow{AB}$.
   On pose $M(x\,;\,y\,;\,z)$, on a alors $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x-3\\y-1\\z+3\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-4\\0\\4\end{pmatrix}$.
   On peut alors dire que $M\in(D)$ si et seulement si il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que $\begin{cases}x-3=-4\lambda\\y-1=0\\z+3=4\lambda\end{cases}$
   D'où, une représentation paramétrique de (D) :
   $$(D):\begin{cases}x=-4\lambda+3\\y=1\\z=4\lambda-3\end{cases}\qquad(\lambda\in\mathbb{R})$$
   (b) D'après cette représentation paramétrique, on a alors
   $$(D)\subset(S)\Longleftrightarrow\forall\lambda\in\mathbb{R},\ (-4\lambda+3)^2+1^2-(4\lambda-3)^2=1$$
   ce qui se vérifie sans problème !
3. Un plan (P) est parallèle au plan (xOy) si et seulement si il admet une équation cartésienne de la forme $z=k$, où k est une constant réelle.
   L'intersection d'un tel plan (P) et de (S) admet donc pour équation cartésienne :
   $$(P)\cap(S):\begin{cases}x^2+y^2-z^2=1\\z=k\end{cases}\quad\text{où } k \text{ est une constante réelle}$$
   Si on pose $I_k(0\,;\,0\,;\,k)$, le repère $(I_k;\,\overrightarrow{i}\,;\,\overrightarrow{j}\,)$ est un repère orthonormé de (P).
   Dans ce repère, l'équation de $(P)\cap(S)$ est alors $x^2+y^2=1+k^2$.
   Cette équation correspond alors au cercle (C_k) inclus dans (P) de centre I_k et de rayon $r_k=\sqrt{1+k^2}$.
4. (a) C'est un cas particulier de la question précédente avec $k=68$.
   $I_{68}(0\,;\,0\,;\,68)$ et $r_{68}=\sqrt{1+68^2}=\sqrt{4625}=5\sqrt{185}$.
   (C) est donc le cercle parallèle au plan (xOy), de centre $I(0\,;\,0\,;\,68)$ et de rayon $r=5\sqrt{185}$.
   (b) On doit étudier le système (1) : $\begin{cases}a<b\\a^2+b^2=4625\\\mathrm{ppcm}(a\,;\,b)=440\end{cases}\quad(a \text{ et } b\in\mathbb{N})$
   Posons $d=\mathrm{pgcd}(a\,;\,b)$. d divise a et b, donc d divise a^2+b^2 et d divise $\mathrm{ppcm}(a\,;\,b)$.
   Donc, si $(a\,;\,b)$ est solution de (1),alors d divise 4625 et 440.
   Or, la décomposition en facteurs premiers de 4625 est :
   $$4625=5^3\times37$$
   et celle de 440 est :
   $$440=2^3\times5\times11$$
   Donc, $\mathrm{ppcd}(4625\,;\,440)=5$.
   D'où, les seuls diviseurs communs dans $\mathbb{N}$ de 4625 et 440 sont : 1 et 5.
   D'où, les seuls valeurs possibles de d sont 1 ou 5. ... D'où : $\mathrm{pgcd}(a\,;\,b)=1$ ou 5.

Montrons maintenant qu'il existe un unique point M de (C) d'abscisse a et d'ordonnées b avec $(a < b)$ et (a et b dans $\mathbb{N}$) et ($\text{ppcm}(a\,;\,b) = 440$).
Posons, $d = \text{pgcd}(a\,;\,b)$, $p = \text{ppcm}(a\,;\,b)$. On sait que $a \times b = d \times p$.

D'après le résultat précédent, on sait que $d = 1$ ou $d = 5$. On a donc deux cas distincts à étudier.

– <u>Etude du cas $d = 1$</u>
  Dans ce cas, on a $a \times b = 440$, donc $b = \dfrac{440}{a}$. Mais $a^2 + b^2 4625$, donc on doit avoir :

$$a^2 + \frac{440^2}{a^2} = 4625$$

  ce qui donne $a^4 - 4625a^2 + 193600 = 0$. C'est une équation bicarré. On pose $X = a^2$, et on écrit alors que X doit vérifié

$$X^2 - 4625X + 193600 = 0\,, \quad \text{avec } X \in \mathbb{N}$$

  Les solutions réelles de cette équation sont $X_1 = \dfrac{4625 + 5\sqrt{824649}}{2}$ et $X_2 = \dfrac{4625 - 5\sqrt{824649}}{2}$.
  Aucunes de ces deux valeurs sont entières (prendre par exemple sa machine à calculer pour le vérifier ....).
  Donc, il n'existe pas $a \in \mathbb{N}$ tel que $a^4 - 4625a^2 + 193600 = 0$.
  Donc, pas de couple $(a\,;\,b)$ solution de (1) dans le cas où $d = 1$.

– <u>Etude du cas $d = 5$</u>
  Si $d = 5$, alors $a \times b = 5 \times 440 = 220$, donc $b = \dfrac{2200}{a}$.
  Comme $a^2 + b^2 = 4625$, a doit alors vérifié l'équation

$$a^2 + \frac{2200^2}{a^2} = 4625$$

  Ce que l'on écrit : $a^4 - 4625a^2 + 2200^2 = 0$. On pose alors $X = a^2$ et ce qui conduit à l'équation

$$X^2 - 4625X + 2200^2 = 0\,, \quad \text{avec } X \in \mathbb{N}$$

  Les solutions réelles de cette équation sont $X_1 = 1600$ et $X_2 = 3025$.
  On doit donc avoir $a^2 = 1600$ ou $a^2 = 3025$. Comme $a \in \mathbb{N}$, cela donne $a = 40$ ou $a = 55$.

  Pour $a = 40$, on a $b = \dfrac{2200}{a} = 55$.
  On a alors un couple $(a\,;\,b)$ candidat à étre solution de (1).
  On vérifie alors que ce couple $(40\,;\,55)$ est bien solution de $\begin{cases} a < b \\ a^2 + b^2 = 4625 \\ \text{ppcm}(a\,;\,b) = 440 \end{cases}$ (a et $b \in \mathbb{N}$).

  Pour $a = 55$, on a alors $b = \dfrac{2200}{a} = 40$ .....Comme la condition $a < b$ n'est pas respectée, le couple $(55\,;\,40)$ n'est pas une solution.

<u>Conclusion</u>
Il existe bien une unique point M répondant à la question ...C'est le point $M(40\,;\,55\,;\,68)$.

Exercice 3 : Commun à tous les candidats.

f définie sur $]1\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \ln(x) - \dfrac{1}{\ln(x)}$. $(\mathcal{C})$ = courbe de f , Γ courbe d'équation $y = \ln(x)$.

1. On calcule la dérivée de f .... et on tombe sur $f'(x) = \dfrac{\ln^2(x) + 1}{x\ln^2(x)}$.

   D'où, $f'(x) > 0$ sur $[1\,;\,+\infty[$ ... d'où f strictement croissante sur cet intervalle.

2. (a) $f(x) - \ln(x) = -\dfrac{1}{\ln(x)}$.

   De plus, $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(x)} = 0^+$.

   D'où $\lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - \ln(x)) = 0^-$.

   Graphiquement, $(\mathcal{C})$ et Γ sont asymptotes en $+\infty$.

   (b) $(\mathcal{C})$ est en-dessous de Γ si et seulement si $f(x) - \ln(x) \leq 0$.

   Donc, si et seulement si $\dfrac{-1}{\ln(x)} \leq 0$, ou encore, si et seulement si $\ln(x) \geq 0$.

   Or, f est définie que $]1\,;\,+\infty[$ et $\forall x \in\,]1\,;\,+\infty[$, $ln(x) > 0$.

   Donc, $(\mathcal{C})$ est en-dessous de Γ.

3. Tangentes à $(\mathcal{C})$ passant par O.

   (a) Soit $a > 1$, M_a point de $(\mathcal{C})$ d'abscisse a et (T_a) tangente à $(\mathcal{C})$ en M_a.

   Une équation de (T_a) est : $(T_a) :\ y = f'(a)(x - a) + f(a)$.

   Cette droite passe par O si et seulement si on a : $0 = f'(a)(0 - a) + f(a)$, ce qui donne bien : $f(a) - af'(a) = 0$.

   (b) On pose alors $g(x) = f(x) - xf'(x)$. On sait que $f'(x) = \dfrac{\ln^2(x) + 1}{x\ln^2(x)}$.

   Donc, l'expression de $g(x)$ en fonction de x pour $x > 1$ est :

   $$g(x) = \ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} - x \times \frac{\ln^2(x) + 1}{x\ln^2(x)} = \ln(x) - \frac{1}{\ln(x)} - \frac{\ln^2(x) + 1}{\ln^2(x)}$$

   Ce qui se simplifie en :

   $$g(x) = \frac{\ln^3(x) - \ln^2(x) - \ln(x) - 1}{\ln^2(x)}$$

   D'où, $\forall x \in\,]1\,;\,+\infty[$, $g(x) = 0 \iff \ln^3(x) - \ln^2(x) - \ln(x) - 1 = 0$.

   (c) On pose $u(t) = t^3 - t^2 - t - 1$, pour $t \in \mathbb{R}$.

   La dérivée de u est : $u'(t) = 3t^2 - 2t - 1 = (3t + 1)(t - 1)$.

   D'où le tableau de signes de $u'(t)$ sur $\mathbb{R}$, puis le tableau de variations de u sur $\mathbb{R}$.

   Faites-les !

   Comme u est croissante sur]-∞ ; $-\dfrac{1}{3}$] et que $u(-\dfrac{1}{3}) = -\dfrac{38}{27} < 0$, on en déduit que u est strictement négative sur]-∞ ; $-\dfrac{1}{3}$].

   Ensuite, u est strictement décroissante sur $[-\dfrac{1}{3}\,;\,1]$, donc u est strictement négative sur cet intervalle !

   Puis, u est strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$, et $u(1) = -2 < 0$, $u(2) = 2 > 0$.

   Donc, comme u est continue sur $\mathbb{R}$, on en déduit d'après le Théorème des valeurs intermédiaires, qu'il existe bien une solution α dans l'intervalle $[1\,;\,2]$ à l'équation $u(t) = 0$.

   u étant strictement croissante sur $[1\,;\,+\infty[$, cette solution α est unique.

   Donc, u s'annule bien une fois et une seule sur $\mathbb{R}$ en un réel $\alpha \in [1\,;\,2]$.

   (d) Or ! l'existence d'une tangente au point d'abscisse $a > 1$ à la courbe de f équivaut au fait que $g(a) = 0$.

   On remarque alors que pour tout $a > 1$, $g(a) = u(\ln(a))$. Donc, $g(a) = 0 \iff u(\ln(a)) = 0$......D'où l'existence d'une tangente unique répondant à la question, tangente au point d'abscisse a vérifiant $\ln(a) = \alpha$, où α est l'unique réel vérifiant $u(\alpha) = 0$. Comme $\alpha \in [1\,;\,2]$, le réel $a > 1$ vérifiant $\ln(a) = \alpha$ est : $a = e^{\alpha}$ On a donc l'encadrement de a : $\mathrm{e} \leq a \leq \mathrm{e}^2$

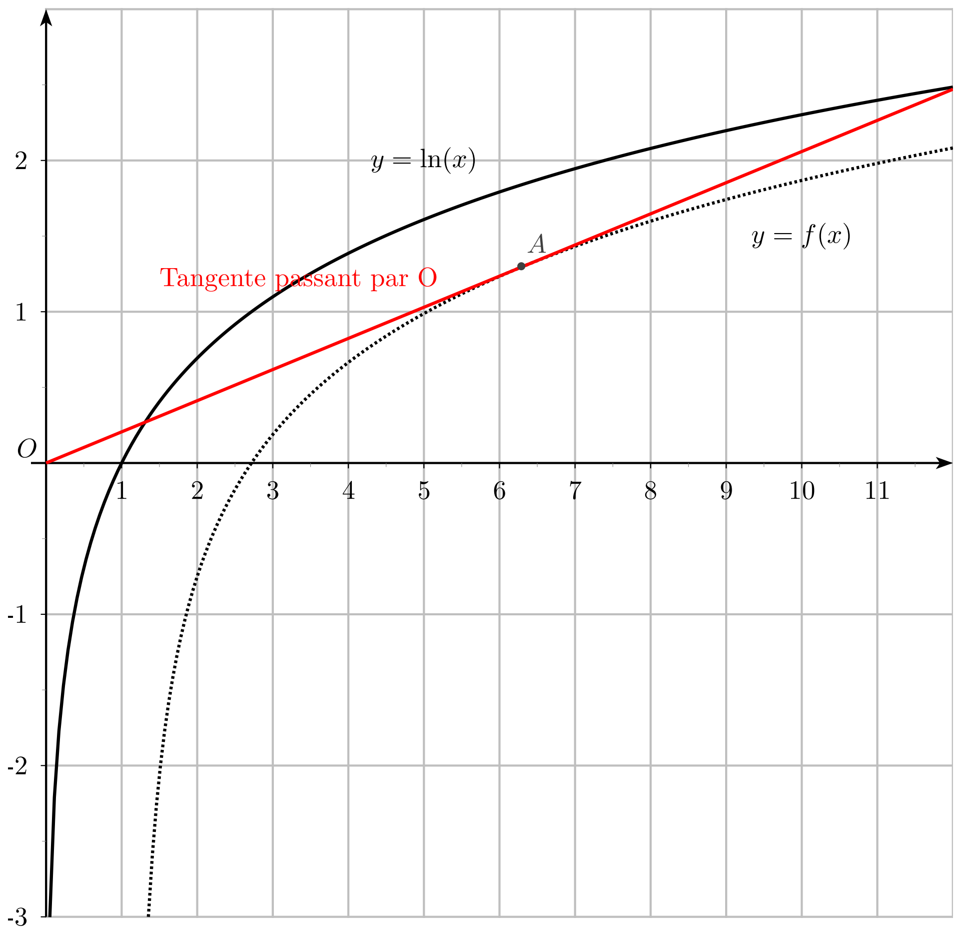
4. Nombre de solutions de l'équation $f(x) = mx$.

   Question très mal posée !

   Posons m_0 le coefficient directeur de la tangente en A à la courbe de f, où A est l'unique point de la courbe de f passant par O.

   – Si $m > m_0$, alors aucun point d'intersection.
   – Si $m = m_0$, alors un seul point d'intersection qui est A.
   – Si $0 \leq m < m_0$, alors deux points d'intersection.
   – Si $m < 0$, alors un seul point d'intersection.

Figure de l'exercice 3



Exercice 4 , Commun à tous les candidats.

$$x_n = \int_0^1 t^n \cos(t)dt \text{ quad et } \quad y_n = \int_0^1 t^n \sin(t)dt$$

Un exercice qui se traite rapidement !

1. (a) Pour tout $t \in [0\,;\,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $t^n \cos(t) \geq 0$.

   Donc, comme $0 \leq 1$, $\displaystyle\int_0^1 t^n \cos(t)dt \geq 0$, c'est à dire, $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \geq 0$.

   (b) Pour $n \in \mathbb{N}$, $x_n - x_{n+1} = \displaystyle\int_0^1 (t^n \cos(t) - t^{n+1}\cos(t))dt = \int_0^1 t^n \cos(t)(1-t)dt$.

   Or, $\forall\, t \in [0\,;\,1]$, $t^n \cos(t)(1-t) \geq 0$, donc $\displaystyle\int_0^1 t^n \cos(t)(1-t)dt \geq 0$, d'où $x_n - x_{n+1} \geq 0$.

   D'où, la suite (x_n) est décroissante.

   (c) On en déduit alors que (x_n) est minorée par 0 (*car à termes positifs* !) et décroissante....
   Suite minorée ET décroissante .... donc suite convergente .. La suite (x_n) est donc convergente.
   De plus, comme $\forall n\mathbb{N}$ $x_n \geq 0$, on peut dire que sa limite L est positif.

$$\lim_{n\to+\infty}(x_n) = L \in \mathbb{R} \quad \text{avec } L \geq 0$$

2. (a) Pour tout $t \in [0\,;\,1]$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $0 \leq t^n \cos(t) \leq t^n$.

   D'où ... Positivité de l'intégrale ! on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n = \displaystyle\int_0^1 t^n \cos(t)dt \leq \int_0^1 t^n dt$.

   Mais , $\displaystyle\int_0^1 t^n dt = \left[\frac{t^{n+1}}{n+1}\right]_0^1 = \frac{1}{n+1}$, d'où $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \leq \dfrac{1}{n+1}$.

   (b) On sait que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$.

   Comme $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq x_n \leq \dfrac{1}{n+1}$, on en déduit, d'après le *Théorème des Gendarmes*, que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$. La suite (x_n) converge donc vers 0.

3. (a) On demande maintenant une intégration par parties...pour, infine, montrer que la suite (y_n) converge aussi vers 0 !
   Mais la même démarche suivie pour la suite (x_n) conduit directement à ce résultat !
   Faisons tout de même cette intégration par parties.
   $n \in \mathbb{N}$ étant fixé, posons $u(t) = t^{n+1}$ et $v(t) = \sin(t)$. On alors $u'(t) = (n+1)t^n$ et $v'(t) = \cos(t)$.
   On peut alors écrire que :

$$x_{n+1} = \int_0^1 t^{n+1}\cos(t)dt = \int_0^1 u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_0^1 - \int_0^1 u'(t)v(t)dt$$

   D'où :

$$x_{n+1} = \underbrace{[t^{n+1}\sin(t)]_0^1}_{1sin(1)-0\sin(0)=\sin(1)} - \underbrace{\int_0^1 (n+1)t^n \sin(t)dt}_{=(n+1)y_n}$$

   On a donc bien $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$.

   (b) De cette dernière relation, on peut en déduire que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_n = -\dfrac{x_{n+1}}{n+1} + \dfrac{\sin(1)}{n+1}$.

   Comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = 0$, on en déduit alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} y_n = 0$.

4. On admet que $\forall n \in \mathbb{N}$, $y_{n+1} = (n+1)x_n - \cos(1)$. On peut donc écrire que

$$\forall n \in \mathbb{N},\ y_{n+1} - x_n = nx_n - \cos(1)$$

   Or, (x_n) et (y_n) convergent vers 0, donc $\lim n \to +\infty(y_n - x_n) = 0$. Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}(nx_n - \cos(1)) = 0$.
   Donc, $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} x_n = \cos(1)$...... La suite (nx_n) converge donc vers $\cos(1)$.
   De même, on a vu que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_{n+1} = -(n+1)y_n + \sin(1)$, donc $x_n + y_n = -ny_n + \sin(1)$.
   On en déduit alors que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} ny_n = \sin(1)$.